FICHA DE EXPECTATIVA DE RESPOSTA DA PROVA ESCRITA - 2ª RETIFICAÇÃO

CONCURSO	
Edital:	013/2021 (03/03/2021)
Carreira:	PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Unidade Acadêmica:	INSTITUTO METROPOLE DIGITAL
Área de Conhecimento:	MATEMÁTICA

GABARITO DAS QUESTÕES DE MÚLTIPLA ESCOLHA	
1	A
2	C
3	C
4	B
5	D
6	D
7	A
8	C
9	B
10	Anulada
11	D
12	D
13	B
14	B
15	C
16	B
17	A
18	Anulada
19	C
20	C

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO PARA TODAS AS QUESTÕES DISCURSIVAS
Clareza e propriedade no uso da linguagem
Coerência e coesão textual
Domínio dos conteúdos, evidenciando a compreensão dos temas objeto da prova
Domínio e precisão no uso de conceitos
Coerência no desenvolvimento das ideias e capacidade argumentativa

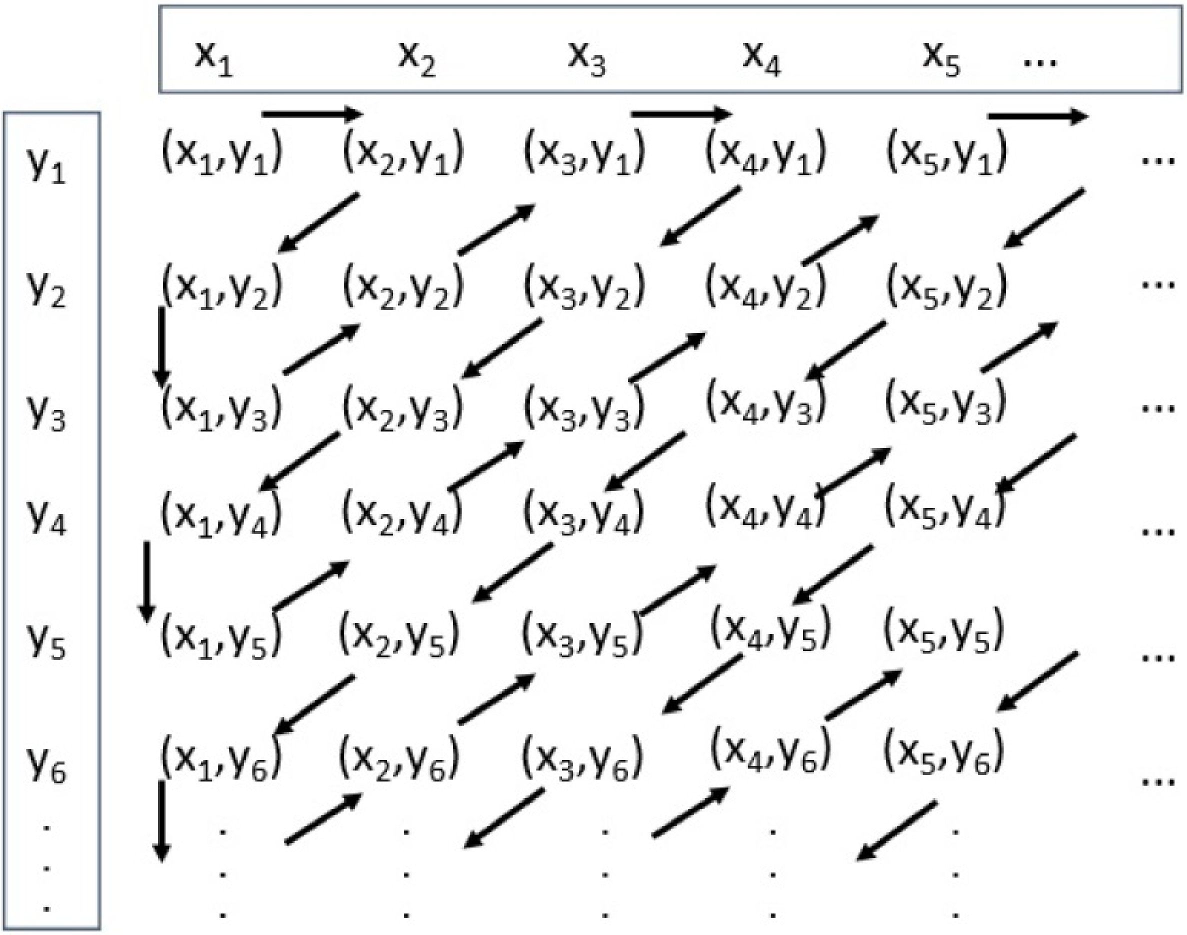
Questão 1: **Valor (0,00 a 3,00)**

Demonstre que se X e Y são ambos conjuntos infinitos contáveis, então $X \times Y$ também é um conjunto infinito contável.

Resposta Esperada:

Suponha que X e Y são conjuntos infinitos contáveis. Então, por definição, existem bijeções $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : \mathbb{N} \to Y$. Portanto, é possível listar todos os elementos de X em uma sequência infinita $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(1), f(2), f(3), ...)$ de forma que os elementos de X não se repetem e cada um deles é eventualmente listado. O mesmo ocorre para os elementos de Y na sequência infinita $(g_m)_{m\in\mathbb{N}} = (g(1), g(2), g(3), ...)$. Logo os elementos de X e Y podem ser escritos na forma de listas infinitas x_1, x_2, x_3, ... e y_1, y_2, y_3, ..., respectivamente.

Agora suponha o conjunto $S = X \times Y$ e a função $h : \mathbb{N} \to S$. Organize os elementos de S como uma matriz cujos elementos $a_{ij} = (f(j), g(i))$ e defina h como uma função que dispõe os elementos de S de acordo com a ordem mostrada na figura abaixo.



Conforme apresentado na figura, nenhum elemento de S ocorre mais de uma vez na sequência dada por h e cada elemento de S eventualmente ocorre nesta sequência. Portanto h é uma bijeção. Logo, por definição de conjuntos infinitos contáveis, $X \times Y$ é um conjunto infinito contável.

Por fim, conclui-se que se X e Y são conjuntos infinitos contáveis, então $X \times Y$ também é um conjunto infinito contável.

Questão 2: **Valor (0,00 a 3,00)**

Considere a operação $\diamond$ sobre $\mathbb{R}$ definida por $x \diamond y = ax + by + cxy$, onde a, b e c são números reais não nulos dados. Determine condições para a, b e c de modo que $\langle \mathbb{R}, \diamond \rangle$ possua estrutura de monóide. É possível construir uma estrutura de grupo sobre $\mathbb{R}$ considerando a operação $\diamond$? Justifique sua resposta.

Resposta Esperada:

Para que $\langle \mathbb{R}, \diamond \rangle$ seja um monóide, deve satisfazer a associatividade e possuir elemento neutro. Portanto, levando em consideração estas propriedades, temos, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, que:

$$\begin{aligned}(x \diamond y) \diamond z &= (ax + by + cxy) \diamond z \\ &= a(ax + by + cxy) + bz + c(ax + by + cxy)z \\ &= a^2x + aby + acxy + bz + acxz + bcyz + c^2xyz\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}x \diamond (y \diamond z) &= x \diamond (ay + bz + cyz) \\ &= ax + b(ay + bz + cyz) + cx(ay + bz + cyz) \\ &= ax + aby + b^2z + bcyz + acxy + bcxz + c^2xyz \\ &= ax + aby + acxy + b^2z + bcxz + bcyz + c^2xyz\end{aligned}$$

Logo, comparando as duas identidades, concluimos que $a^2 = a$, $b^2 = b$ e $ac = bc$ (ou seja, $a = b$), implicando que $a = b = 0$ ou $a = b = 1$ e c arbitrário. Como, por hipótese, a e b são não nulos, vale a segunda opção.

Além disso, deve existir $e \in \mathbb{R}$ tal que $e \diamond x = x$. Assim, $e \diamond x = ae + bx + cex = x$ e portanto, $ae = 0$ e $b + ce = 1$. Como $a = b = 1$ temos que $e = 0$ e c continua arbitrário.

Para que $\langle \mathbb{R}, \diamond \rangle$ seja um grupo, precisaria garantir também a existência de elemento simétrico. Logo, $x \diamond x' = x + x' + cxx' = e = 0$ e daí, $x' = \dfrac{-x}{1 + cx}$, o que existiria somente para os casos em que $cx \neq -1$, o que não pode ser garantido dada a arbitrariedade do x. Concluimos então que, para $a = b = 1$ e c arbitrário, $\langle \mathbb{R}, \diamond \rangle$ não possui estrutura de grupo.

Questão 3: **Valor (0,00 a 4,00)**

Seja a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$.

a)$(2,0$ **pts**$)$ Demonstre que T é uma transformação linear.

b)$(1,0$ **pt**$)$ Encontre o núcleo de T e a dimensão do núcleo de T.

b)$(1,0$ **pt**$)$ Determine uma base para o conjunto imagem de T.

Resposta Esperada:

a) Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \\
&= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\
&= ((x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2), (y_1 + y_2) + 2(z_1 + z_2), (x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) + \\
&\quad (z_1 + z_2)) \\
&= (x_1 + 2y_1 - z_1, y_1 + 2z_1, x_1 + 3y_1 + z_1) + (x_2 + 2y_2 - z_2, y_2 + 2z_2, x_2 + 3y_2 + z_2) \\
&= T(u) + T(v). \\
T(\alpha u) &= T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \\
&= (\alpha x_1 + \alpha 2y_1 - \alpha z_1, \alpha y_1 + \alpha 2z_1, \alpha x_1 + \alpha 3y_1 + \alpha z_1) \\
&= \alpha(x_1 + 2y_1 - z_1, y_1 + 2z_1, x_1 + 3y_1 + z_1) \\
&= \alpha T(u).
\end{aligned}$$

b) Por definição, $N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$, então $(x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z) = (0, 0, 0)$ ou

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

A solução do sistema é: $x = 5z$ e $y = -2z$. Logo $N(T) = \{(5z, -2z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} = \{z(5, -2, 1) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$. Portanto, $N(T) = [(5, -2, 1)]$ e $dimN(T) = 1$.

c) Por definição, $Im(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (a, b, c)\}$, então $(x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z) = (a, b, c)$ ou

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + 2z = b \\ x + 3y + z = c \end{cases}$$

O sistema só admite solução se $a + b - c = 0$. Logo, $Im(T) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b - c = 0\}$. Como a equação $a + b - c = 0$ possui duas variáveis livres (por exemplo $c = a + b$), então $dimIm(T) = 2$. Portanto, um exemplo de base da imagem de T é o conjunto $\{(1, 0, 1), (1, 1, 2)\}$, pois os vetores são geradores e LI.

Ocorrências:
Após análise dos pedidos de reconsideração, as questões 10 e 18 foram anuladas.

NATAL, 21 de Julho de 2021 às 10:00.

Assinado digitalmente em 21/07/2021 08:20	Assinada digitalmente em 21/07/2021 08:21	Assinado digitalmente em 21/07/2021 08:21
ANDERSON PAIVA CRUZ PRESIDENTE	IVAN MEZZOMO 1° EXAMINADOR	EDUARDO SILVA PALMEIRA 2° EXAMINADOR