

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

FICHA DE EXPECTATIVA DE RESPOSTA DA PROVA ESCRITA	
Edital nº:	010/2018-PROGESP
Carreira:	(X) MAGISTÉRIO SUPERIOR () MAGISTÉRIO EBT
Unidade Acadêmica:	ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
Área de Conhecimento:	MECÂNICA DOS FLUIDOS

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO PARA TODAS AS QUESTÕES DISCURSIVAS
▪ Clareza e propriedade no uso da linguagem; ▪ Coerência e coesão textual; ▪ Domínio dos conteúdos, evidenciando a compreensão dos temas objeto da prova; ▪ Domínio e precisão no uso de conceitos; ▪ Coerência no desenvolvimento das ideias e capacidade argumentativa.

QUESTÃO 1:

Questão 1) (Valor: 2,0 pontos)

De acordo com o enunciado da questão é necessário apresentar o Teorema do Transporte de Reynolds, explicar cada termo do Teorema (0,4) e aplicá-lo para obter a equação integral da conservação da massa (0,4) e da quantidade de movimento (0,4), e em seguida, solucionar a questão – apresentar a vazão mássica através da superfície de controle ab em função de ρ , U , b e δ (0,4), determinar a força de arrasto sobre a superfície superior da placa plana em função de ρ , U , b e δ e explicar como esse arrasto (viscoso) pode ser calculado sem a viscosidade do fluido ser conhecida (0,4).

Abaixo segue a apresentação do Teorema do Transporte de Reynolds (0,4):

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dV_{vol} + \int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (1)$$

Esse teorema é a relação fundamental entre a taxa de variação de qualquer propriedade extensiva arbitrária, N , de um sistema e as variações dessa propriedade associadas a um volume de controle:

$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}}$ representa a taxa de variação da propriedade extensiva do sistema N .

$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \eta \rho dV_{vol}$ representa a taxa de variação da quantidade da propriedade N dentro do volume de controle. O termo $\int_{VC} \eta \rho dV_{vol}$ calcula o valor instantâneo de N dentro do volume de controle.

$\int_{SC} \eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ representa a taxa na qual a propriedade N está saindo da superfície do volume de controle.

**APLICAÇÃO DO TEOREMA DO TRANSPORTE DE REYNOLDS PARA OBTER A EQUAÇÃO
INTEGRAL DA CONSERVAÇÃO DA MASSA (0,4)**

Deve-se lembrar que não há massa cruzando a superfície de controle num sistema, assim:

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sistema}} = 0 \quad (2)$$

$$M_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} dm = \int_{V_{ol}(\text{sistema})} \rho dV_{ol} \quad (3)$$

Relacionando a propriedade extensiva N com a propriedade intensiva η , tem-se:

$$N_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \eta dm = \int_{V_{ol}(\text{sistema})} \eta \rho dV_{ol} \quad (4)$$

Faz-se: $N = M$ e $\eta = 1$, com essa substituição tem-se:

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV_{vol} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (5)$$

Comparando as equações (2) e (5) e fazendo rearranjos, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV_{vol} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (6)$$

Na equação (6), o primeiro termo representa a taxa de variação da massa dentro do volume de controle; o segundo termo representa a taxa líquida de fluxo de massa para fora através da superfície de controle.

**APLICAÇÃO DO TEOREMA DO TRANSPORTE DE REYNOLDS PARA OBTER A EQUAÇÃO
INTEGRAL DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO (0,4)**

A segunda lei de Newton aplicada a um sistema movendo-se em relação a um sistema de coordenadas inerciais é dada pela equação abaixo:

$$\vec{F} = \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} \quad (7)$$

e que a quantidade de movimento linear do sistema é dada por

$$\vec{P}_{\text{sistema}} = \int_{M(\text{sistema})} \vec{V} dm = \int_{V_{ol}(\text{sistema})} \vec{V} \rho dV_{ol} \quad (8)$$

e a força resultante, $\vec{F}$, inclui todas as forças de campo e de superfície atuando sobre o sistema,

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_B \quad (9)$$

onde $\vec{F}_s$ são as forças de superfícies e $\vec{F}_B$ são as forças de campo. Para se obter a formulação para volume de controle da segunda lei de Newton, tem-se $N = \vec{P}$ e $\eta = \vec{V}$, com essa substituição tem-se:

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V} \rho dV_{vol} + \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (10)$$

Sabe-se que:

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \vec{F})_{\text{sobre o sistema}} \quad (11)$$

Combinando as equações (10) e (11) obtêm a formulação da segunda lei de Newton para um volume de controle não acelerado

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \vec{V} \rho dV_{vol} + \int_{SC} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (12)$$

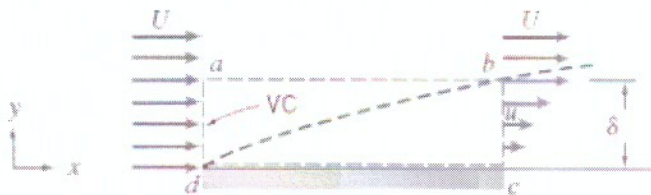
A equação (12) estabelece que a força total (devido às forças de superfície e de campo) atuando sobre o volume de controle leva à taxa de variação da quantidade de movimento dentro do volume de controle

fu *[assinatura]* *elien*

(a integral de volume) e/ou à taxa líquida na qual a quantidade de movimento está saindo do volume de controle através da superfície de controle.

Após a apresentação do Teorema do Transporte de Reynolds, bem como, a aplicação para obter a equação integral da conservação da massa e da quantidade de movimento, iniciar-se-á a solução da vazão mássica sobre a superfície de controle ab (0,4).

Analisando o volume de controle abaixo, percebe-se que há quatro superfícies de controle: ab, bc, cd e da



Aplicando a equação integral da conservação da massa no volume de controle especificado, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV_{vol} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

O primeiro termo do primeiro membro da equação acima é eliminado, pois tem-se escoamento permanente, assim:

$$\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Outra consideração é que o escoamento é incompressível e bidimensional. No volume de controle, tem-se:

$$\int_{ab} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{bc} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{cd} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{da} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

A integral sobre a superfície de controle cd é igual a zero, pois não há escoamento atravessando a placa plana. A integral sobre a superfície de controle ab é o que está sendo procurado. O sinal negativo no terceiro termo do primeiro membro da primeira equação abaixo é devido ao produto escalar. A integral sobre a superfície de controle bc apresenta um perfil de velocidade linear e a integral sobre a superfície de controle ad apresenta um perfil uniforme, assim:

$$\dot{m}_{ab} + \int_0^\delta \rho u_{bc} b dy - \int_0^\delta \rho u_{cd} b dy = 0$$

$$\dot{m}_{ab} = -\rho b \int_0^\delta U \frac{y}{\delta} dy + \rho b \int_0^\delta U dy$$

$$\dot{m}_{ab} = -\rho b \frac{U}{\delta} \frac{y^2}{2} \Big|_0^\delta + \rho b U \delta$$

$$\dot{m}_{ab} = -\frac{\rho b U \delta}{2} + \rho b U \delta$$

$$\dot{m}_{ab} = \frac{\rho b U \delta}{2}$$

Aplicando a equação integral da quantidade de movimento e lembrando que não há forças de campo na direção x e há apenas a força de arrasto sobre a superfície da placa, tem-se (0,4):

$$F_x = \int_{SC} u \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

[Assinaturas manuais]

$$F_x = \dot{m}_{ab}U - \rho b U^2 \delta + \rho b \int_0^\delta u^2 dy$$

$$F_x = \dot{m}_{ab}U - \rho b U^2 \delta + \rho b \int_0^\delta U^2 \frac{y^2}{\delta^2} dy$$

$$F_x = \dot{m}_{ab}U - \rho b U^2 \delta + \rho b \frac{U^2}{\delta^2} \frac{y^3}{3} \Big|_0^\delta$$

$$F_x = \frac{\rho b U^2 \delta}{2} - \rho b U^2 \delta + \frac{\rho b U^2 \delta}{3}$$

$$F_x = -\frac{\rho b U^2 \delta}{6}$$

A força de arrasto foi calculada sem o conhecimento do valor da viscosidade dinâmica porque esta já foi contemplada dentro da camada limite desenvolvida ao longo da placa plana. Na camada limite é onde os efeitos viscosos são importantes.

QUESTÃO 2:

Questão 2) (Valor: 2,0 pontos)

Qualquer conduto onde escoar um fluido deve apresentar uma seção de alimentação e uma de descarga. A região do escoamento próxima da seção de alimentação é denominada região de entrada. Esta região pode ser constituída pelos primeiros metros de um tubo conectado a um tanque ou pela porção inicial de uma longa tubulação de ar quente vindo de uma fornalha. Normalmente, o fluido entra no conduto com um perfil de velocidade uniforme. Os efeitos viscosos provocam a aderência do fluido às paredes do conduto (condição de não-eskorregamento). Assim, é produzida uma camada limite, onde os efeitos viscosos são importantes, ao longo da parede do duto, tanto que o perfil inicial de velocidade muda com a distância longitudinal, x , até que o fluido atinja o final do comprimento de entrada. A partir desta seção, o perfil de velocidade não varia mais com x . A camada limite cresce até preencher totalmente o duto. Neste ponto é dito que o escoamento está completamente desenvolvido e a camada limite é importante em toda a seção transversal da tubulação **(0,5)**.

Para obter uma equação do diferencial de pressão em função da tensão de cisalhamento, do diâmetro e do comprimento em estudo devem-se fazer algumas considerações. O escoamento é plenamente desenvolvido e em regime permanente, dessa forma o escoamento não sofre nenhum tipo de aceleração. A aceleração local e a aceleração convectiva são nulas. Considerando que os efeitos gravitacionais são desprezíveis, a pressão é constante ao longo de qualquer seção transversal da tubulação. Aplicando a segunda lei de Newton ao elemento infinitesimal da figura abaixo tem-se **(0,75)**:

$$p_1 \pi r^2 - (p_1 - \Delta p) \pi r^2 - \tau \pi r l = 0 \quad (1)$$

Simplificando a equação, tem-se:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau}{r} \quad (2)$$





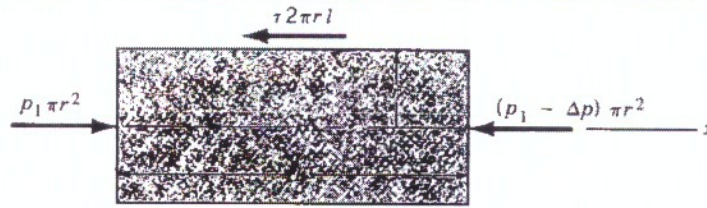


Figura 1. Movimento de um elemento fluido cilíndrico num tubo. Retirado de Munson.

A equação (2) representa o equilíbrio de forças necessário para mover cada partícula fluida através do tubo com uma velocidade constante. Como Δp e l não são funções da coordenada radial, r , segue que $2\tau/r$ também deve ser independente de r . Assim, $\tau = Cr$, onde C é uma constante. Em $r = 0$ (a linha de centro do tubo), não há tensão de cisalhamento e em $r = D/2$ (a parede do tubo) a tensão de cisalhamento é máxima, e é denominada τ_p , a tensão de cisalhamento na parede. Assim, $C = 2\tau_p/D$, e a tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal da tubulação é:

$$\tau = \frac{2\tau_p r}{D} \quad (3)$$

Relacionando as equações (2) e (3), tem-se:

$$\Delta p = \frac{4l\tau_p}{D} \quad (4)$$

A equação (4) é a equação procurada.

Dando continuidade, abaixo serão desenvolvidos os passos para encontrar a relação entre a espessura da subcamada viscosa com a viscosidade cinemática do fluido, do comprimento da tubulação, da massa específica do fluido, do diferencial de pressão e do diâmetro da tubulação (0,75).

Basicamente, há três tipos de camada dentro do escoamento turbulento: a subcamada viscosa, a camada de superposição e a camada externa. Na subcamada viscosa a tensão de cisalhamento laminar predomina. Na camada externa há predominância da tensão turbulenta e na camada de superposição há a transição entre as duas tensões de cisalhamento. O perfil de velocidade na subcamada viscosa pode ser descrito da seguinte maneira:

$$u^+ = y^+ \quad (5a)$$

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{yu^*}{\vartheta} \quad (5b)$$

onde $y = R - r$ é a distância medida a partir da parede, $\bar{u}$ é a velocidade média temporal na direção x e

$u^* = (\tau_p/\rho)^{1/2}$ é denominada velocidade de atrito e ϑ é a viscosidade cinemática. A equação 5b é válida na região fina e adjacente a parede lisa, ou seja, para $0 \leq yu^*/\vartheta \leq 5$. Assim, a espessura da subcamada viscosa, δ_s é dada por

$$\frac{\delta_s u^*}{\vartheta} = 5 \quad (6)$$

$$\delta_s = \frac{5\vartheta}{u^*} \quad (7)$$

Sabe-se que $u^* = (\tau_p/\rho)^{1/2}$, assim

$$\delta_s = \frac{5\vartheta}{(\tau_p/\rho)^{1/2}} \quad (8)$$

Substituindo a equação (4) em (8), tem-se

$$\delta_s = \frac{5\vartheta}{\left(\frac{\Delta p D}{4l}\right)^{1/2}} \quad (9)$$

$$\delta_s = \frac{5\vartheta}{\left(\frac{\Delta p D}{4\rho l}\right)^{1/2}} \quad (10)$$

[Assinaturas manuais]

QUESTÃO 3:

Questão 3) (Valor: 1,5 pontos)

$$\text{De } d(\rho u A) = 0, \quad \rho u A = \text{cte},$$

$$\text{temos } \frac{dA}{A} + \frac{du}{u} + \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (1) \quad (0,5)$$

objetivo: encontrar uma equação que relacione variação de velocidade (du) com variação de área (dA).

$$\text{Da equação de Euler: } dp = -\rho u du$$

$$\text{temos } \frac{dp}{\rho} = -u du \quad (0,2)$$

$$\text{Mas } \frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{\rho}$$

Como o escoamento é isentrópico,

$$\frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2, \quad \text{então} \quad (0,3)$$

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = -u du$$

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} = -u du$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-u du}{a^2} = -\frac{u^2}{a^2} \frac{du}{u} = -M^2 \frac{du}{u}$$

Substituindo em (1):

$$\frac{dA}{A} + \frac{du}{u} - M^2 \frac{du}{u} = 0$$

$$\frac{dA}{A} + (1 - M^2) \frac{du}{u} = 0 \quad (0,5)$$

$$\left| \frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u} \right| \text{ Relação área-velocidade}$$

~~St~~ ~~St~~ ~~St~~

QUESTÃO 3 - CONTINUAÇÃO

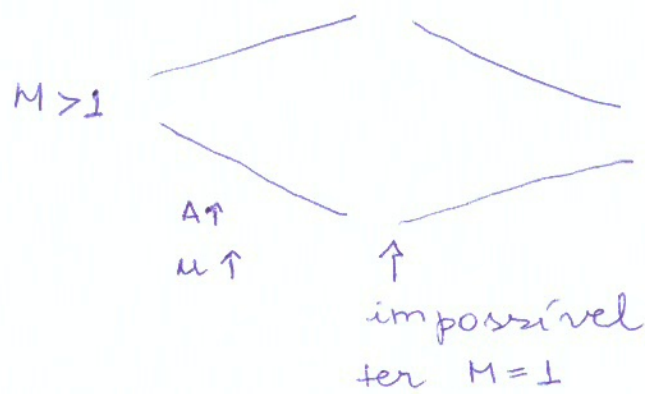
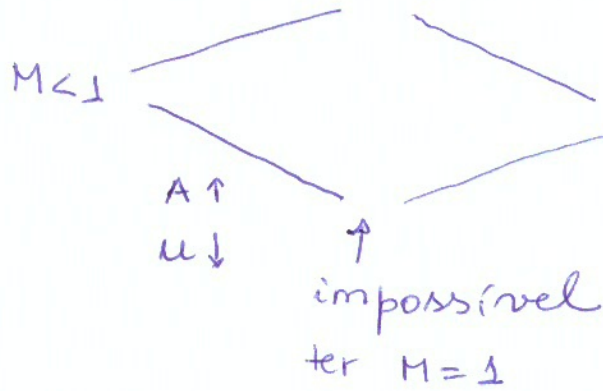
Comentários:

- 1) para escoamento subsônico ($0 \leq M < 1$), $(M^2 - 1) < 0$, então para diminuição de velocidade deve-se ter aumento de área, e, para aumento de velocidade deve-se ter diminuição da área. Para escoamento compressível subsônico, para diminuir a velocidade deve-se ter duto divergente e, para aumentar a velocidade deve-se ter duto convergente.
- 2) Para $M > 1$, escoamento supersônico, $(M^2 - 1) > 0$, e o aumento de velocidade de está associado a um aumento de área. Para que se aumente a velocidade deve-se ter associado um aumento de área (canal divergente) e para que haja diminuição da velocidade deve-se considerar canal convergente.
- 3) Para $M = 1$ (escoamento sônico) a equação torna-se $\frac{dA}{A} = 0$, o que corresponde a um máximo ou mínimo local. Mas, se $\frac{dA}{A}$ é máximo local, tem-se

JK

 M. M. M.

QUESTÃO 3 - CONTINUAÇÃO



logo $\frac{dA}{A}$ é mínimo local.

Stk  Kline

QUESTÃO 4:

Questão 4) (Valor: 1,5 pontos)

Para assegurar a semelhança entre escoamentos do modelo e do protótipo:

1º) garantir que modelo e protótipo sejam geometricamente similares, ou seja, modelo e protótipo devem ter a mesma forma e, todas as dimensões do modelo sejam relacionadas com as dimensões do protótipo por um fator de escala constante (0,4).

2º) escoamentos de modelo e protótipo devem ser cinematicamente similares, ou seja, as velocidades em pontos correspondentes têm a mesma direção e sentido, diferem apenas por um fator de escala constante. Como as fronteiras sólidas geram linhas de corrente de contorno sólido – escoamentos cinematicamente similares devem ser geometricamente similares (0,4).

3º) dinamicamente similares, ou seja, quando os escoamentos sobre modelo e protótipo tem distribuição de força tais que tipos idênticos de forças são paralelos e relacionam-se em módulo por um fator de escala constante em todos os pontos correspondentes (0,4).

Neste caso, forças referem-se a todas as forças, viscosas, de pressão, de tensão superficial, etc.

O teorema dos Pi de Buckingham pode ser utilizado para obter grupos adimensionais governantes de um fenômeno de escoamento. Deve-se garantir que cada grupo adimensional independente tem o mesmo valor no modelo e no protótipo (0,3).

QUESTÃO 5:

Questão 5) (Valor: 1,5 pontos)

Teorema de Crocco : $T \nabla s = \nabla h_0 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ (0,2)

Em regime permanente $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ e o teorema torna-se

$$T \nabla s = \nabla h_0 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (0,1)$$

O termo:

$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$ representa vorticidade

∇h_0 é o gradiente de entalpia total

$T \nabla s$ é gradiente de entropia (0,2)



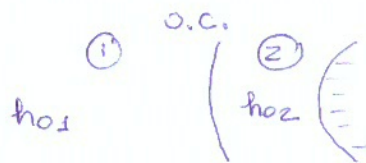
QUESTÃO 5 - CONTINUAÇÃO

Re-arranjando os termos:

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla h_0 - T \nabla s$$

comentários:

- 1) se o escoamento tem gradiente de entalpia total e/ou gradiente de entropia então o escoamento é rotacional.
- 2) Considerando uma onda de choque destacada, em frente a um corpo rombudo, tem-se



através da onda de choque não há variação de entalpia total

$$h_{02} = h_{01} \quad (0,5)$$

Mas há variação de entropia através da onda de choque, ou seja, $\nabla s \neq 0$ e, pelo Teorema de Crocco, $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \neq 0$ após a onda de choque. Neste sentido, conclui-se que atrás da onda de choque destacada, o escoamento é rotacional.

(0,5)



QUESTÃO 6:

Questão 6) (Valor: 1,5 pontos)

Usando a equação de Navier-Stokes para fluido Newtoniano com viscosidade constante e fluxo na direção vertical (z), temos:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

(1) (2) (2) (3) (3) (3)

(1) escoamento permanente

(2) fluxo unidimensional na direção vertical ($u=v=0$)

(3) A velocidade só varia na direção horizontal ($\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) - \frac{\rho g}{\mu} \text{ integrando em } x: \quad (0,5)$$

Condições de contorno

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) x - \frac{\rho g x}{\mu} + C_1 \text{ integrando em } x:$$

(1) $x=0$; $w=U$

(2) $x=h$; $w=0$

$$w = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) x^2 - \frac{\rho g x^2}{2\mu} + C_1 x + C_2$$

usando a primeira condição de contorno:

$$U = C_2$$

usando a segunda condição de contorno:

$$C_1 = \frac{\rho g h}{2\mu} - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) h - \frac{U}{h}$$

substituindo C_1 e C_2 , temos:

$$w = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) x^2 - \frac{\rho g x^2}{2\mu} + \frac{\rho g h x}{2\mu} - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) h x - \frac{U x}{h} + U$$

$$w = \left(\frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dz} \right) - \frac{\rho g}{2\mu} \right) (x^2 - hx) - \frac{U x}{h} + U \quad (0,5)$$

11

11/11/2011

QUESTÃO 6 - CONTINUAÇÃO

$$Q = \int w dA = \int_0^h w L dx = \int_0^h \left[\left(\frac{1}{2u} \left(\frac{dP}{dz} \right) - \frac{\rho g}{2u} \right) (x^2 - hx) + U \left(1 - \frac{x}{h} \right) \right] L dx$$

$$Q = \left[\left(\frac{1}{2u} \left(\frac{dP}{dz} \right) - \frac{\rho g}{2u} \right) \left(\frac{x^3}{3} - \frac{hx^2}{2} \right) + U \left(x - \frac{x^2}{2h} \right) \right]_0^h L$$

$$Q = \left[\left(\frac{1}{2u} \left(\frac{dP}{dz} \right) - \frac{\rho g}{2u} \right) \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2} \right) + U \left(h - \frac{h}{2} \right) \right] L$$

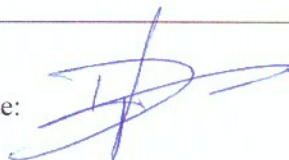
$$Q = \left[\left(\frac{1}{2u} \left(\frac{dP}{dz} \right) - \frac{\rho g}{2u} \right) \left(-\frac{h^3}{6} \right) + \frac{Uh}{2} \right] L$$

$$Q = \left(\frac{\rho g}{2u} - \frac{1}{2u} \left(\frac{dP}{dz} \right) \right) \frac{h^3 L}{6} + \frac{UhL}{2}$$

0,5

Assinatura dos Membros
da Comissão

Presidente:



1º Examinador: 

2º Examinador: 