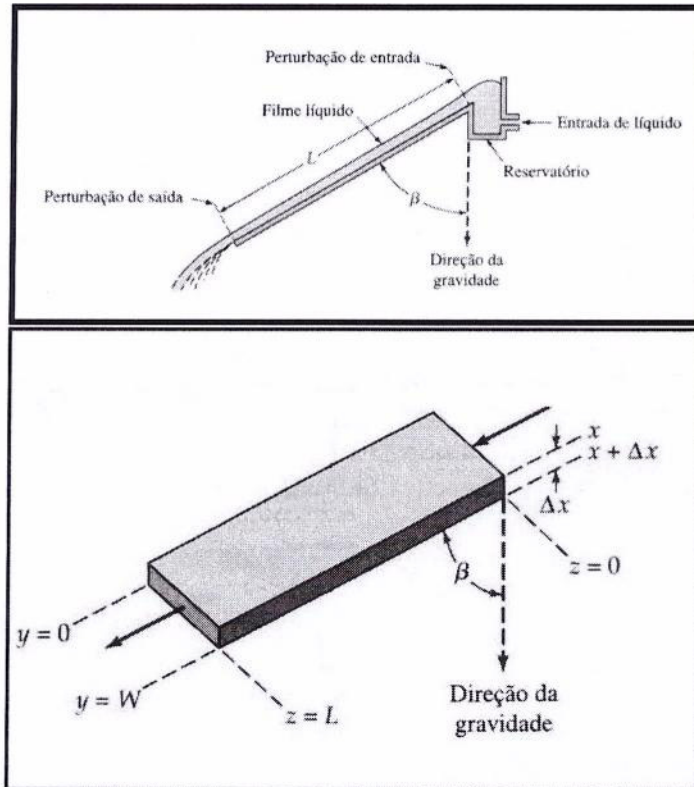


Questão 1

Considere o escoamento de um líquido, sobre uma placa inclinada de comprimento L e largura W .



Uma descrição adequada pode ser obtida desprezando os efeitos de entrada e de saída da placa inclinada. O comprimento L (eixo z) e largura W (eixo y) são grandes se comparados a espessura δ do filme de líquido (eixo x).

Solução:

As hipóteses do problema são:

1. Escoamento permanente;
2. Densidade constante;
3. Componentes de x e de y da velocidade são zero;

Análise Inicial

Em geral, as componentes de velocidade são funções de x , y e z . Para o problema em questão, a velocidade ao longo do eixo y (largura W) é constante. Em princípio,

$$v_z = f(x, z) \quad (1)$$

Equação da continuidade

Para $v_x = v_y = 0$,

Handwritten signature and initials.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

A Equação (2) afirma que v_z independe de z . Portanto,

$$v_z = f(x) \quad (3)$$

Análises das Tensões de Newtonianas

Para fluidos incompressíveis, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

O tensor tensão molecular (fluxo molecular de momento) é definido, em coordenadas cartesianas, como:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_i \delta_j \tau_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_1 \delta_1 \tau_{11} + \delta_1 \delta_2 \tau_{12} + \delta_1 \delta_3 \tau_{13} + \\ \delta_2 \delta_1 \tau_{21} + \delta_2 \delta_2 \tau_{22} + \delta_2 \delta_3 \tau_{23} + \\ \delta_3 \delta_1 \tau_{31} + \delta_3 \delta_2 \tau_{32} + \delta_3 \delta_3 \tau_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$.

O tensor gradiente de velocidade (produto diádico entre o operador vetorial e o vetor velocidade) é definido por:

$$\nabla \mathbf{V} = \left(\sum_{i=1}^3 \delta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{j=1}^3 \delta_j v_j \right) = \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_i \delta_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Desenvolvendo,

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \delta_1 \left(\delta_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \delta_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \delta_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + \\ \delta_2 \left(\delta_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \delta_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \delta_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) + \\ \delta_3 \left(\delta_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \delta_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \delta_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \delta_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \delta_1 \delta_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \delta_1 \delta_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \\ \delta_2 \delta_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \delta_2 \delta_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \delta_2 \delta_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \\ \delta_3 \delta_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \delta_3 \delta_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \delta_3 \delta_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

As componentes do tensor gradiente de velocidade são:

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (5)$$

O transporte do tensor gradiente de velocidade, fornecido pela matriz da Equação (5), é dado por:

$$(\nabla \mathbf{V})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (6)$$

A generalização da lei de Newton da viscosidade é dada por:

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right] + \left(\frac{2}{3} \mu - k \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\delta} \quad (7)$$

Substituindo as Equações (4), (5), (6) e $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ na Equação (7),

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} = -\mu \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \right\} \quad (7)$$

As componentes são:

Para $x = 1$: $\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \stackrel{=0}{=} 0$

Para $y = 2$: $\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \stackrel{=0}{=} 0$

Para $z = 3$: $\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \stackrel{=0}{=} 0$

Para $(x = 1 \text{ e } y = 2)$: $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \stackrel{=0}{=} 0$

Para $(x = 1 \text{ e } z = 3)$: $\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \stackrel{=0}{=} -\mu \frac{\partial v_z}{\partial x}$

Para $(y = 2 \text{ e } z = 3)$: $\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \stackrel{=0}{=} 0$

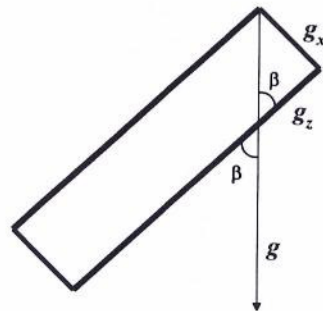
Equação de Movimento

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = - \left[\cancel{\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial}{\partial z} \left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)} \right] + \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (8)$$

e

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho \left(\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial t}} + v_x \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}} + v_y \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial y}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial z}} \right) = 0 \quad (9)$$

Para determinar as componentes g_x e g_z , considere o esquema apresentado abaixo.



De acordo com o esquema, $g_x = g \sin \theta$ e $g_z = g \cos \theta$. A combinação das Equações (8) e (9) e a expressão para g_x fornece a componente x.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \sin \theta \quad (10)$$

Componente y

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = - \left(\cancel{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}} \right) + \cancel{\rho g_y} - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (11)$$

e

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho \left(\cancel{\frac{\partial v_y}{\partial t}} + v_x \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}} + v_y \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial z}} \right) = 0 \quad (12)$$

A combinação das Equações (11) e (12) fornece: $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Esta relação informa que a pressão independe de y.

Componente z

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = - \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}} \right) + \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (13)$$

e

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (14)$$

A combinação das Equações (13) e (14) fornece:

$$-\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

ou

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (16)$$

Em resumo,

$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \sin \theta$	(17)
$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$	(18)
$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \rho g \cos \theta - \frac{\partial P}{\partial z}$	(19)

Analisando o sistema estudado, verifica-se que a pressão P é independente da coordenada z , $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$. Assim:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \rho g \cos \theta \quad (20)$$

As análises das tensões newtonianas mostram que τ_{xz} depende apenas de x ; logo, a derivada parcial pode ser transformada em derivada ordinária,

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho g \cos \theta \quad (21)$$

Integrando,

$$\tau_{xz} = (\rho g \cos \theta) x + C_1 \quad (22)$$

A constante de integração pode ser determinada usando a seguinte condição de contorno. Para $x = 0$ e $\tau_{xz} = 0$. Portanto,

$$\tau_{xz} = (\rho g \cos \theta) x \quad (23)$$

Substituindo a lei de Newton na Equação (13),

$$-\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} = (\rho g \cos \theta) x \quad (24)$$

A Equação (3) afirma que v_z depende apenas de x . Portanto, a Equação (24) pode ser escrita como:

$$\frac{dv_z}{dx} = -\left(\frac{\rho g \cos \theta}{\mu}\right) x \quad (25)$$

Integrando,

$$v_z = -\left(\frac{\rho g \cos \theta}{\mu}\right) \left(\frac{x^2}{2}\right) + C_2 \quad (26)$$

A constante C_2 é calculada através da seguinte condição de contorno. Para $x = \delta$, $v_z = 0$. Assim,

$$C_2 = \left(\frac{\rho g \cos \theta}{2\mu}\right) \delta^2 \quad (27)$$

Substituindo a Equação (27) na Equação (26),

$$v_z = -\left(\frac{\rho g \cos \theta}{2\mu}\right) x^2 + \left(\frac{\rho g \cos \theta}{2\mu}\right) \delta^2 = \left(\frac{\rho g \cos \theta}{2\mu}\right) \delta^2 \left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] \quad (28)$$

Velocidade Máxima

A velocidade máxima é a velocidade para $x = 0$,

$$v_z^{\max} = \frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{2\mu} \quad (29)$$

Velocidade Média

A velocidade média em coordenadas cartesianas sobre a seção transversal do filme é dada por:

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^W \int_0^\delta v_z dx dy}{\int_0^W \int_0^\delta dx dy} = \frac{\int_0^W \int_0^\delta \left(\frac{\rho g \cos \theta}{2\mu}\right) \delta^2 \left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right] dx dy}{W \delta} \quad (30)$$

Desenvolvendo,

Handwritten signature/initials in blue ink.

Concurso Edital No. 035/2017 - Área de Fenômenos de Transporte
 Universidade Federal do Rio Grande do Norte
 Prova Escrita
 Data: 22/04/2018
Candidato(a): GABARITO

1. EM ANEXO

2. ANULADA

3. (a) O número de Biot representa a razão entre a convecção na superfície do corpo e a condução no interior do corpo.

ou

O número de Biot representa a razão entre a resistência à condução dentro do corpo e a resistência à convecção na superfície do corpo.

$$\begin{aligned} Bi &= \frac{h}{k/L_c} \left(\frac{\Delta T}{\Delta T} \right) = \frac{\text{convecção na superfície do corpo}}{\text{condução no interior do corpo}} \\ &= \frac{L_c/k}{1/h} = \frac{\text{resistência à condução no interior do corpo}}{\text{resistência à convecção na superfície do corpo}} \end{aligned}$$

- (b) O número de Biot é mais provável ser maior para sólido mau condutor, uma vez que tais corpos têm resistências maiores à condução de calor.
- (c) Razão entre as forças inerciais e forças viscosas.
- (d) Vazão mássica é definida por $\dot{m} = \rho u A$, onde ρ é a densidade mássica do fluido, u é a velocidade do fluido e A é a área de seção transversal da tubulação. O número de Reynolds é definido como:

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu}$$

e, portanto, pode-se obter a expressão abaixo usando a definição de vazão mássica,

$$Re = \frac{\rho \dot{m} D}{\rho A \mu} = \frac{\dot{m} D}{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right) \mu} = \frac{4 \dot{m}}{\pi D \mu}$$

sendo inversamente proporcional ao Reynolds.

- (e) Pela teoria cinética dos gases,

$$D_{AB} \propto \frac{T^{3/2}}{p} \left(\frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B} \right)^{1/2}$$

Nessa condição, a temperatura aumenta a difusão pois aumenta o choque e a interação entre as moléculas, aumentando sua mobilidade. O aumento da pressão diminui o espaço entre as espécies, diminuindo o espaço livre para a difusão. Por fim, a massa molecular infere o tamanho da molécula e, portanto, quanto maior a espécie, maior a sua dificuldade de mobilidade.

4. (a) Etapas de solução CFD são pré-processamento (definição de geometria, malha, modelos e condições de contorno), solução numérica – solver – (discretização e solução de sistema linear) e pós-processamento (análise de resultados).
 - (b) Esquema de discretização com 2ª ordem de acurácia. Resultado pode oscilar dependendo do número de Peclet de malha.
 - (c) Em malhas estruturadas, cada volume possui o mesmo número de células vizinhas e podem, portanto, ser mapeados em sistema matricial. Malhas não-estruturadas não possuem um arranjo estruturado, sem limitação no número de células vizinhas.
 - (d) Os erros em CFD podem ser causados por erros numéricos (discretização, arredondamento, procedimentos iterativos), erros no código (erros na implementação computacional) ou erros humanos (uso incorreto do software). As incertezas em CFD podem ser obtidas por incertezas nos dados de entrada (geometria, condições de contorno, propriedades do material) e incertezas na modelagem (incertezas na representação física de dados modelo ou simplificações de modelos).
5. ANULADA
6. ANULADA
7. Para análise da troca de calor estacionária em sólidos, a equação de transporte se resume a:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{q}^{(F)}) &= \dot{q}_v && \text{para a região com tório} \\ \nabla \cdot (\mathbf{q}^{(C)}) &= 0 && \text{para a região com alumínio}\end{aligned}$$

Em coordenadas esféricas e considerando apenas a componente radial

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 q_r^{(F)})}{\partial r} = \dot{q}_0 \left(1 + b \left(\frac{r}{R^{(F)}} \right)^2 \right) \quad \text{e} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 q_r^{(C)})}{\partial r} = 0$$

Integrando as equações, chega-se a

$$q_r^{(F)} = \dot{q}_0 \left(\frac{r}{3} + \frac{b}{R^{(F)2}} \frac{r^3}{5} \right) + \frac{C_1^{(F)}}{r^2} \quad \text{e} \quad q_r^{(C)} = \frac{C_1^{(C)}}{r^2}$$

com constantes de integração $C_1^{(F)}$ e $C_1^{(C)}$. Aplicando as condições de contorno

$$r = 0, \quad q_r^{(F)} \text{ não é infinito} \quad \text{e} \quad r = R^{(F)}, \quad q_r^{(F)} = q_r^{(C)}$$

chega-se a

$$q_r^{(F)} = \dot{q}_0 \left(\frac{r}{3} + \frac{b}{R^{(F)2}} \frac{r^3}{5} \right) \quad \text{e} \quad q_r^{(C)} = \dot{q}_0 \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right) \frac{R^{(F)3}}{r^2}$$

$$\langle v_z \rangle = \left(\frac{\rho g \cos \theta}{2W \delta \mu} \right) \int_0^W \int_0^\delta (\delta^2 - x^2) dx dy = \left(\frac{\rho g \cos \theta}{2W \delta \mu} \right) \int_0^W \left(\delta^2 x \Big|_0^\delta - \frac{x^3}{3} \Big|_0^\delta \right) dy \quad (31)$$

A integração final fornece:

$$\langle v_z \rangle = \left(\frac{\rho g \cos \theta}{2W \delta \mu} \right) \left(\delta^3 - \frac{\delta^3}{3} \right) \int_0^W dy = \left(\frac{\rho g \cos \theta}{2W \delta \mu} \right) \left(\frac{3\delta^3 - \delta^3}{3} \right) y \Big|_0^W = \left(\frac{\rho g \cos \theta}{2\delta \mu} \right) \left(\frac{2\delta^3}{3} \right) \quad (32)$$

Portanto,

$$\langle v_z \rangle = \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{\rho g \delta^2 \cos \theta}{2\mu} \right) = \frac{2v_z^{\max}}{3} \quad (33)$$

Vazão Mássica

A vazão mássica é dada por:

$$\dot{m} = \int_0^W \int_0^\delta \rho v_z dx dy = \rho W \delta \langle v_z \rangle \quad (34)$$

Substituindo a Equação (33) na Equação (34),

$$\dot{m} = \frac{\rho^2 W g \delta^3 \cos \theta}{3\mu} \quad (34)$$

Para obter o perfil de temperatura, usa-se a lei de Fourier para condução térmica em ambas expressões:

$$-k_t \frac{dT^{(F)}}{dr} = \dot{q}_0 \left(\frac{r}{3} + \frac{b}{R^{(F)2}} \frac{r^3}{5} \right) \quad \text{e} \quad -k_a \frac{dT^{(C)}}{dr} = \dot{q}_0 \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right) \frac{R^{(F)3}}{r^2}$$

Ao integrar as expressões, obtém-se

$$T^{(F)} = -\frac{\dot{q}_0}{k_t} \left(\frac{r^2}{6} + \frac{b}{R^{(F)2}} \frac{r^4}{20} \right) + C_2^{(F)} \quad \text{e} \quad T^{(C)} = \frac{\dot{q}_0}{k_a} \left(\frac{1}{3} + \frac{b}{5} \right) \frac{R^{(F)3}}{r} + C_2^{(C)}$$

onde as constantes de integração são obtidas aplicando as condições de contorno

$$r = R^{(F)}, \quad T^{(F)} = T^{(C)} \quad \text{e} \quad r = R^{(C)}, \quad T^{(C)} = T_0$$

e, por fim, chega-se às expressões para os perfis de temperatura

$$\begin{aligned} T^{(F)} &= \frac{\dot{q}_0 R^{(F)2}}{6k_t} \left\{ \left[1 - \left(\frac{r}{R^{(F)}} \right)^2 \right] + \frac{3}{10} b \left[1 - \left(\frac{r}{R^{(F)}} \right)^4 \right] \right\} \\ &\quad + \frac{\dot{q}_0 R^{(F)2}}{3k_a} \left(1 + \frac{3}{5} b \right) \left(1 - \frac{R^{(F)}}{R^{(C)}} \right) \\ T^{(C)} &= \frac{\dot{q}_0 R^{(F)2}}{3k_a} \left(1 + \frac{3}{5} b \right) \left(\frac{R^{(F)}}{r} - \frac{R^{(F)}}{R^{(C)}} \right) \end{aligned}$$