UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E ENGENHARIA DE PETRÓLEO
PROVA DE SELEÇÃO MESTRADO 2017.2

Linha de Pesquisa: Automação na Indústria de Petróleo e Gás Natural (APG)

<u>QUESTÕES</u>

1- No instante t = 0 um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante de tempo t é dada por: $s(t) = 16t - t^2$. Pede-se: ***(2,0 ponto)***
a) A velocidade do corpo no instante $t = 2$
b) A aceleração do corpo no instante $t = 4$

2- Calcule, usando integral por partes, o valor de $\int (3x+7)\cos x\,dx$. ***(1,5 ponto)***

3- Calcule $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+3x-6}{x^2+2x-3}$ ***(1,5 ponto)***

4- Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$ (***1,5 ponto)***
a) A matriz inversa de **A**
b) Autovalores e autovetores da matriz **A**

5- Dados $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & a \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ b \end{bmatrix}$ **(1,5 ponto)**

Considerando o sistema **Ax**=**B**, determine valores de **a** e **b** para que o sistema tenha:
a) Mais de uma solução
b) Uma única solução
c) Não tenha solução
Calcule a solução x quando a=1 e b=4

6- Um sistema automático de alarmes contra incêndio utiliza três células sensíveis ao calor que agem independentemente uma da outra. Cada célula entra em funcionamento com probabilidade 0,8 quando a temperatura atinge 60º C. Se pelo menos uma célula entrar em funcionamento o alarme soa. Calcular a probabilidade de soar o alarme quando a temperatura atingir 60º C.

(2,0 pontos)

GABARITO

Questão 1

a) $v(t) = \dfrac{ds(t)}{dt} = 16t - t^2\Big|_{t=2} = 16 - t\Big|_{t=2} = 16 - 2 = 14$

b) $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt} = \dfrac{d^2s(t)}{dt^2} = \dfrac{d^2(16t - t^2)}{dt^2} = \dfrac{d(16 - t)}{dt} = -1\Big|_{t=5} = -1$

Questão 2

Seja: $\int f(x)\dfrac{dg(x)}{dx}dx = f(x)g(x) - \int \dfrac{df(x)}{dx}g(x)dx$, considerando: $f(x) = 3x + 7$ e $\dfrac{dg(x)}{dx} = \cos x$, temos que: $\dfrac{df(x)}{dx} = 3$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$, daí:

$$\int f(x)\frac{dg(x)}{dx}dx = f(x)g(x) - \int \frac{df(x)}{dx}g(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int (3x+7)\cos x dx =$$
$$= (3x+7)\operatorname{sen} x - \int 3\operatorname{sen} x dx =$$
$$= (3x+7)\operatorname{sen} x - 3\int \operatorname{sen} x dx =$$

$$\boxed{= (3x+7)\operatorname{sen} x + 3\cos x + cte}$$

Questão 3

De acordo com as regras para o cálculo de limites, o limite de um quociente de polinômios quanto a variável dos polinômios tendem para infinito é dado, simplesmente, pelo quociente dos coeficientes dos termos de maior ordem dos polinômios, ou seja:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 + 3x - 6}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{1} = 3$$

Ou, podemos aplicar o teorema de L`Hospital duas vezes:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2 + 3x - 6}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{d}{dx}(3x^2 + 3x - 6)}{\frac{d}{dx}(x^2 + 2x - 3)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{d}{dx}(6x+3)}{\frac{d}{dx}(2x+2)}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{2} = \frac{3}{1} = 3$$

Questão 4

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} c = 1 \\ d = 0 \\ -6a - 5c = 0 \qquad a = -\dfrac{5}{6} \\ -6b - 5d = 1 \qquad b = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Resposta: Inversa de A= $\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{6} & -\dfrac{1}{6} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \qquad \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 6 & \lambda + 5 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 5) - (-6) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

Autovalores de A $\begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$

Autovetores de **A**: $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$

$$\mathbf{Av}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1 \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \qquad v_{12} = -3v_{11} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ -3x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Av}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2 \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} \qquad v_{22} = -2v_{21} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} y \\ -2y \end{bmatrix}$$

Questão 5

b) Para que o sistema tenha uma única solução é necessário que o determinante de **A** seja diferente de zero (matriz **A** inversível)

$$\det \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & a \end{bmatrix} = -a + 2 - 2 - (-2 - 2 - a) = -2a + 4 = 2(2 - a) \neq 0 \;\Rightarrow\; a \neq 2$$

Assim o sistema terá uma única solução se **a for diferente de 2**.

c) Para que o sistema não tenha solução, é necessário que **a seja igual a 2** (determinante de **A** igual a zero) e **b seja diferente de 4**, pois nesse caso teremos duas equações conflitantes.

a) Para que o sistema tenha uma mais de uma solução é necessário que o determinante de **A** seja igual a zero, ou seja, **a seja igual a 2** e que **b seja igual a 4**. Nesse caso teremos 2 equações e três incógnitas, que possui infinitas soluções.

- A solução para o caso de a=1 e b=4 será:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & a \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} & 1 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Questão 6

Seja C_i o evento de a célula i= 1,2,3 entra em funcionamento e $\overline{C}_i$ Observe que os eventos são independentes.

O evento complementar, isto é da célula não entrar em funcionamento.
$P(C_i)$: Probabilidade da célula C_i entra em funcionamento. $P(C_i)$=0,8 para i=1,2,3
$P(A)$: Probabilidade do alarme soar e $P(\overline{A})$: Probabilidade do alarme não soar.

$$P(\overline{A}) = P(\overline{C}_1)P(\overline{C}_2)P(\overline{C}_3) = (1-0{,}8)^3 = 0{,}02$$
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}98$$