UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E ENGENHARIA DE PETRÓLEO
PROVA DE SELEÇÃO MESTRADO 2016.2

Linha de Pesquisa: Automação na Indústria de Petróleo e Gás Natural

QUESTÕES

1- Considere a seguinte função $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 4$. Pede-se: ***(1,5 ponto)***

a) Calcule o valor da derivada da função no ponto $x = 2$

b) Faça o gráfico da função e apresente uma interpretação gráfica para a derivada calculada

2- Calcule o valor da integral $\int_{-1}^{1}(-x^2 + 3x + 4 + sen\,\pi x)dx$ e apresente uma interpretação gráfica para a integral calculada. ***(1,0 ponto)***

3- Deseja-se construir uma piscina retangular com 900 m^2. Calcule o perímetro mínimo que pode ser obtido para essa piscina. ***(1,5 ponto)***

4- Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 3x - 6}{x^2 + 2x - 3}$ ***(1,0 ponto)***

5- Se: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, ache **B**, tal que $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$ ***(1,5 ponto)***

6- Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, determine os autovalores e autovetores de A.

(1,5 ponto)

7- Considere uma urna contendo 5 bolas brancas e 4 bolas pretas. Retirando-se em sequência duas bolas sem reposição, determine: ***(2,0 pontos)***

a) a probabilidade de que as 2 bolas retiradas sejam de mesma cor

b) a probabilidade da segunda bola retirada ter sido branca

c) a probabilidade da primeira bola retirada ter sido preta, dado que a segunda bola retirada foi branca

GABARITO

1)

a) $\frac{df(x)}{dx} = 3x^2 - 4x + 2 \;\Big|_{x=2} = 12 - 8 + 2 = 6$

b) Fazer a curva aproximada e identificar a derivada como sendo a reta tangente à curva no ponto x=2

2)

a) $\int_{-1}^{1} (-x^2 + 3x + 4 + sen\,\pi x)dx = -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x + \frac{1}{\pi}\cos \pi x \;\Big|_{-1}^{1}$

$$\int_{-1}^{1} (-x^2 + 3x + 4 + sen\,\pi x)dx = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 4 + \frac{1}{\pi}\cos \pi - \left[\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{\pi}\cos(-\pi)\right] = \frac{31}{6} - \left(-\frac{13}{6}\right) = \frac{44}{6}$$

b) Fazer a curva aproximada e identificar a integral como sendo a área compreendida entre a curva e o eixo x entre os pontos x=-1 e x=1. A contribuição da função seno é zero, pela mesma ser uma função ímpar.

3) Sejam x e y as dimensões da piscina.

Sabemos que $xy = 900$

O perímetro será dado por: $P = 2(x + y)$

$P = 2(x + \frac{900}{x})$

Derivando os dois lados em relação a x:
$P' = 2(1 - \frac{900}{x^2})$

Igualando P' a zero...
$1 - \frac{900}{x^2} = 0$
$x^2 = 900$
$x = 30m$

Com isso o perímetro será:
$P = 2(30 + \frac{900}{30})$
$P = 2(30 + 30)$
$P = 120m$

4) Existe uma indefinição no limite 0/0. Uma solução é aplicar o teorema de L´Hopital

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+3x-6}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{d}{dx}(3x^2+3x-6)}{\frac{d}{dx}(x^2+2x-3)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{6x+3}{2x+2}=\frac{9}{4}$$

Ou podemos fatorar os 2 polinômios e cancelar as suas raízes comuns:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+3x-6}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\frac{9}{4}$$

5) Temos que:

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{A} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b_{11}^2 + b_{12}b_{21} = 3 \\ b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} = -2 \\ b_{21}b_{11} + b_{22}b_{21} = -4 \\ b_{21}b_{12} + b_{22}^2 = 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações, temos que:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}4142 & -0{,}7071 \\ -1{,}4142 & 1{,}4142 \end{bmatrix}$$

6) Os auto valores da matriz A podem ser determinados da seguinte forma:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_1 = 3 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

Agora, calculando os autovetores associados aos autovalores $\lambda = 3$, chegamos ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4z = 3x \\ 3y + 5z = 3y; \\ -z = 3z \end{cases}$$

cuja solução é: z = 0 e x, y quaisquer. De onde concluímos que os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda = 3$ são do tipo:

$$v = (x, y, 0)$$

Por fim, calculando os autovetores associados aos autovalores $\lambda = -1$, chegamos ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4z = -x \\ 3y + 5z = -y \\ -z = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \frac{5}{4}z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

De onde concluímos que os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda = -1$ são do tipo:

$$v = (z, \frac{5}{4}z, z)$$

7) Considere uma urna contendo 5 bolas brancas e 4 bolas pretas. Retirando-se em sequência duas bolas sem reposição, determine:

a) a probabilidade de que as 2 bolas retiradas sejam de mesma cor.

E_1: Duas bolas sejam de mesma cor

$$P(E_1) = P(B_1, B_2) + P(P_1, P_2)$$

B_i: Bola ser branca na retirada i

P_i: Bola ser preta na retirada i

$$P(E_1) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1) + P(P_1)P(P_2 \mid P_1) = \frac{5}{9}\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\frac{3}{8} = \frac{4}{9}$$

b) a probabilidade da segunda bola retirada ter sido branca

E_2: a segunda bola seja branca

$$P(E_2) = P(B_2) = P(B_1, B_2) + P(P_1, B_2) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1) + P(P_1)P(B_2 \mid P_1) = \frac{5}{9}\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\frac{5}{8} = \frac{5}{9}$$

c) a probabilidade da primeira bola retirada ter sido preta, dado que a segunda bola retirada foi branca

E_3: a primeira bola retira ter sido preta dado que a segunda bola foi branca

$$P(E_3) = P(P_1 \mid B_2) = \frac{P(P_1)P(B_2 \mid P_1)}{P(B_2)} = \frac{\frac{4}{9}\frac{5}{8}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{2}$$