Processo Seletivo Simplificado – Professor Substituto

Edital N^o 023/2024-PROGESP – Matemática – ECT

INSTRUÇÕES

1. Você recebeu essa folha de instruções tendo, em seguida, a Folha Oficial de Respostas. Além disso, recebeu um caderno de questões com 11 questões objetivas.
2. Somente será corrigida a Folha Oficial de Respostas, que deve ser respondida com caneta azul ou preta.
3. Será considerada correta a questão que tiver sido respondida com uma única alternativa e esta seja coincidente com o gabarito oficial.
4. Será considerada errada a questão na qual não for marcada nenhuma alternativa ou for marcada mais de uma alternativa ou for marcada alternativa diversa do gabarito oficial.
5. Não é permitido o uso de qualquer tipo de eletrônico.
6. Não é permitido desgrampear as folhas da prova (regras e folha de respostas ou carderno de questões).
7. Não é permitido usar a folha oficial de respostas para rascunho ou cálculos.
8. Use a frente e o verso das folhas do caderno de questões para rascunhos e cálculos das questões.
9. A duração máxima da prova é de 4 horas.
10. Não será permitido levar o caderno de questões se terminar a prova em menos de 2h.
11. A prova vale um total de 10,0 pontos distribuídos uniformemente entre as questões.
12. Se alguma questão vier a ser anulada, sua pontuação será igualmente distribuída entre as questões restantes
13. O resultado desta prova escrita será divulgado na área do candidato no SIGRH e enviado para o e-mail cadastrado pelo candidato.
14. Até 6 candidatos melhor classificados nesta prova escrita, com notas maiores ou iguais a 7,0, serão convocados para a prova didática.

Candidato: ____

FOLHA OFICIAL DE RESPOSTAS

Questão	**Resposta**				
1	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
2	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
3	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
4	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
5	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
6	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
7	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
8	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
9	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
10	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
11	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

GABARITO

Questão	**Resposta**				
1	(a)	(b)	(c)	●	(e)
2	●	(b)	(c)	(d)	(e)
3	(a)	(b)	(c)	●	(e)
4	(a)	●	(c)	(d)	(e)
5	(a)	(b)	●	(d)	(e)
6	(a)	●	(c)	(d)	(e)
7	(a)	●	(c)	(d)	(e)
8	(a)	(b)	(c)	●	(e)
9	●	(b)	(c)	(d)	(e)
10	(a)	(b)	(c)	(d)	●
11	**ANULADA**				

CADERNO DE QUESTÕES

1) Determine o conjunto solução da equação: $\big|\,\mathrm{sen}(x)\,\big|^2 - \big|\,2\mathrm{sen}(x)\,\big| = 0$

(a) $S = \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\; x = 0\,\big\}$.

(b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \dfrac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(d) $S = \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, x = k\,\pi, k \in \mathbb{Z}\,\big\}$.

(e) N.D.A.

Solução: item (d).

Resolvendo a equação modular $|t^2| - |2t| = 0$, obtemos $t = 2$ ou $t = -2$ ou t=0.

Como $-1 \leq \mathrm{sen}(x) \leq 1$, a única possíbilidade é $\mathrm{sen}(x) = 0$, o que acontece para $x = k\pi,\; k \in \mathbb{Z}$.

2) O conjunto solução da equação $\left| -\log_3(x) + \log_3(x)^2 - \log_9(x) \right| = 1$, é:

(a) $S = \left\{ \frac{1}{9};\ 9 \right\}$.

(b) $S = \left\{ \frac{1}{27};\ 27 \right\}$.

(c) $S = \{ 9 \}$.

(d) $S = \left\{ \frac{1}{27} \right\}$.

(e) N.D.A.

Solução: item (a).

Usando propriedades básicas de logaritmos: $\log_b(a)^c = c\log_b(a)$ e $\log_{b^c}(a) = \frac{1}{c}\log_b(a)$, temos que:

$$\left|\frac{1}{2}\log_3(x)\right| = 1 \implies \frac{1}{2}\log_3(x) = \pm 1 \implies x = \frac{1}{9} \quad \wedge \quad x = 9 \implies S = \left\{ \frac{1}{9};\ 9 \right\}$$

3) Considere a reta L, tangente à curva $\mathcal{C}: 2x^2 + y^2 - 8 = 0$ no ponto $P = (1, y_0)$ do primeiro quadrante, o ângulo que L forma com o eixo y é:

(a) $\arccos\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

(b) $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)$.

(c) $\arccos\left(\dfrac{3}{15}\right)$.

(d) $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}\right)$.

(e) N.D.A.

Solução: item (d).

Como o ponto $P = (1, y_0)$ está no primeiro quadrante e pertence à curva $\mathcal{C}$, temos $y_0 = \sqrt{6}$.

Usando derivada implícita, ou regra da cadeia, para encontrar a derivada neste ponto, encontramos a equação da reta tangente.

Encontramos a intersecção da reta tangente com os eixos coordenados e em seguida calculamos o cosseno que a reta tangente forma com o eixo y.

Usando a função arco cosseno calculamos o ângulo solicitado.

4) Considere a curva: $\mathcal{C}: \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

Sabendo que a curvatura é dada por: $k(x) = \dfrac{|\, f''(x)\,|}{\left[\, 1 + \big(f'(x)\big)^2\,\right]^{\frac{3}{2}}}$

ou $k(t) = \dfrac{|\, \vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\,|}{|\, \vec{r}\,'(t)\,|^3}.$

A maior e a menor curvatura de $\mathcal{C}$ são:

(a) $\dfrac{1}{8}$ e $\dfrac{1}{512}$.

(b) 1 e $\dfrac{1}{8}$.

(c) $\dfrac{1}{8}$ e $\dfrac{1}{256}$.

(d) 4 e 2.

(e) N.D.A.

Solução: item (b).

Parametrizamos a curva $\mathcal{C}$ (que é uma elipse) como: $\vec{r}(t) = \langle\, \cos(t), \mathrm{sen}(t)\,\rangle$, $t \in \big[0, 2\pi\big]$.

Usando que $k(t) = \dfrac{|\, \vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\,|}{|\, \vec{r}\,'(t)\,|^3}$, obtemos $k(t) = \dfrac{8}{|4 + 12\,\mathrm{sen}^2(t)\,|^3}$.

Assim, $k(t)$ tem máximo quando $\mathrm{sen}(t) = 0$ e tem mínimo em $\mathrm{sen}^2(t) = 1$.

5) Considere as afirmações abaixo:

(I) Se a matriz A é simétrica e a matriz B é antisimétrica, então a matriz AB é antissimétrica se o comutador $\left[\, A\,,\, B\,\right] = AB - BA$ é nulo.

(II) $\det\left[\,\left(2A\right)^{-1}\right] = -\dfrac{1}{16}$ se $\det\left(A\right) = -2$.

(III) A matriz $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\text{sen}(x) & 0 \\ \text{sen}(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é ortogonal e o produto dos autovalores da matriz A é 1.

(IV) Seja A a matriz dos coeficientes de um sistema linear não homogêneo. Se $\det\left(A\right) \neq 0$ então, o sistema linear tem mais de uma solução.

Podemos afirmar que elas são, respectivamente:

(a) V V V V.

(b) V V V F.

(c) V F V F.

(d) F F V V.

(e) N.D.A.

Solução: item (c).

I – Se A é simétrica, $A^T = A$. Se B é antissimétrica, $B^T = -B$. Se o comutador é nulo então $AB = BA$. Assim $(AB)^T = B^T A^T = -BA = -AB$, então AB antissimétrica. Afirmação **Verdadeira**.

II – Sabemos que $det((2A)^{-1}) = 1/det(2A)$. Porém para prosseguir, precisamos saber a ordem da matriz A, logo não podemos dizer que $det((2A)^{-1}) = -\frac{1}{16}$, pois esse depende da ordem de A. Afirmação **Falsa**.

III – A matriz tem colunas unitárias e ortogonais, logo A é uma matriz ortogonal. Temos também que $det(A) = 1 = I_1 \cdot I_2 \cdot I_3$, produto do seus autovalores. Assim I_1, I_2 e I_3 são autovalores de A. Afirmação **Verdadeira**.

IV – $Ax = B$ sistema linear não homogêneo. Se $detA \neq 0$, então A tem inversa. Assim $A^{-1}AX = A^{-1}B$, onde $X = A^{-1}B$, tem solução única. Afirmação **Falsa**.

6) Sabendo que a área da superfície é dada por: $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dA.$

Qual a área da superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$ e acima do plano xy?

(a) $a^2\pi$.

(b) $a^2(\pi - 2)$.

(c) $\dfrac{a^2\pi}{2}$.

(d) $\dfrac{a^2\pi}{4}$.

(e) N.D.A.

Solução: item (b).

Podemos considerar $z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, pois queremos a área de superfície de uma região acima do plano xy. Assim:

$$S = \iint_D \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\,dA$$

onde dA é o elemento de área do domínio D. Em coordenadas polares com $(a > 0)$, temos: $0 \leq \rho \leq a\cos(\theta)$; e $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. Assim:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos(\theta)} \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\,dr\,d\theta = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\,1 - \sqrt{\operatorname{sen}^2(x)}\,\Big]\,d\theta \\ S &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \Big[\,1 + \operatorname{sen}(x)\,\Big]\,d\theta + a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\,1 - \operatorname{sen}(x)\,\Big]\,d\theta = a^2\big[\pi - 2\big] \end{aligned}$$

7) Um pesquisador está estudando os efeitos da temperatura, da pressão e do tipo de catalisador no resultado de certa reação química. Três temperaturas diferentes, quatro pressões diferentes e cinco catalisadores diferentes são considerados para realização de testes. Quantos testes envolvem o uso das duas menores temperatura e das duas menores pressões?

(a) 10 testes.

(b) 20 testes.

(c) 40 testes.

(d) 60 testes.

(e) N.D.A.

Solução: item (b).

Como temos duas opções de escolha para pressão, duas escolhas para pressões e cinco opções para catalisador temos $2 \times 2 \times 5 = 20$ testes.

8) Um professor de faculdade nunca finaliza sua aula antes do final do horário e sempre termina dentro de dois minutos após o horário. Seja X = tempo entre o fim do horário e o fim da aula e suponha que a função densidade de probabilidade (fdp) de X seja:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2\,, & \text{para } \; 0 \leq x \leq 2 \\ \\ 0\,, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Qual é a probabilidade de a aula terminar dentro de 1 minuto do final do horário?

(a) $0,325$.

(b) $0,250$.

(c) $0,150$.

(d) $0,125$.

(e) N.D.A.

Solução: item (d).

Como a probabilidade total de ocorrência de qualquer evento da variável aleatória X é igual a 1, temos:

$$\int_0^2 kx^2\,dx = 1$$

Assim, com $k = \dfrac{3}{8}$, a probabilidade solicitada é:

$$\int_0^1 \frac{3}{8}\,x^2 = \frac{1}{8} = 0,125.$$

9) Suponha que f é diferenciável em $I\!R$ e que α é um número real.

Sejam $F(x) = f(x^\alpha)$ e $G(x) = \big[\, f(x)\big]^\alpha$, a derivada $\big[3F(x) - G(x)\big]'$ é:

(a) $\alpha \Big\{3\, x^{\alpha-1}\, f'(x^\alpha) - \big[f(x)\big]^{\alpha-1}\, f'(x)\Big\}.$

(b) $\Big\{3\,\alpha x^{\alpha-1}\, f'(x^\alpha) - \big[f(x)\big]^{\alpha-1}\, f'(x)\Big\}.$

(c) $\alpha\, f'(x)\Big\{3\, x^{\alpha-1} - \big[f(x)\big]^{\alpha-1}\Big\}.$

(d) $\alpha \Big\{3\, f'(x^\alpha) - \big[f(x)\big]^{\alpha-1}\, f'(x)\Big\}.$

(e) N.D.A.

Solução: item (a).

Usando a regra da cadeia: $F'(x) = f'\big(x^\alpha\big)\,\big(x^\alpha\big)' = f'\big(x^\alpha\big)\,\alpha\, x^{\alpha-1} = \alpha\, x^{\alpha-1}\, f'\big(x^\alpha\big).$

Usando a regra da cadeia: $G'(x) = \alpha\,\Big[f\big(x\big)\Big]^{\alpha-1}\,\Big[f(x)\Big]' = \alpha\, x^{\alpha-1} = \alpha\Big[f\big(x\big)\Big]^{\alpha-1} f'(x)$

Assim, a expressão solicitata: $\big[3F(x) - G(x)\big]' = \alpha\,\Big\{3\, x^{\alpha-1}\, f'(x^\alpha) - \big[f(x)\big]^{\alpha-1}\, f'(x)\Big\}$

10) A solução geral da equação diferencial não homogênea $y'' + 3y' - 4y = 4x + 5$ é:

(a) $y(x) = -x - \dfrac{1}{4}$.

(b) $y(x) = 4x + 5$.

(c) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - x - \dfrac{1}{4}$.

(d) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} + 4x + 5$.

(e) N.D.A.

Solução: item (e).

A solução particular é da forma $y_p(x) = bx + c$, como temos $y_p'(x) = b$ e $y_p''(x) = 0$, ficamos com:

$y'' + 3y' - 4y = (0) + 3(b) - 4(bx + c) = 4x + 5 \;\Rightarrow\; b = -1$ e $c = -2 \;\Rightarrow\; y_p(x) = -x - 2$.

Assim, a solução geral é:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - x - 2$$

11) Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = -y^2\,\vec{i} + x\,\vec{j} + \operatorname{sen}^2(z)\,\vec{k}$ e $\mathcal{C}$ é a curva da intersecção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. ($\mathcal{C}$ orientado no sentido anti-horário).

(a) 2π.

(b) π.

(c) $\dfrac{\pi}{2}$.

(d) 0.

(e) N.D.A.

Solução: QUESTÃO ANULADA!