UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
SISTEMA INTEGRADO DE GESTÃO DE RECURSOS HUMANOS

EMITIDO EM 10/10/2022 10:39

FICHA DE EXPECTATIVA DE RESPOSTA DA PROVA ESCRITA

CONCURSO	
Edital:	071/2022 (24/05/2022)
Carreira:	PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
Unidade Acadêmica:	CT - DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA
Área de Conhecimento:	MECÂNICA DOS SÓLIDOS, TEORIA DA ELASTICIDADE E DINÂMICA DE ESTRUTURAS

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO PARA TODAS AS QUESTÕES DISCURSIVAS
Clareza e propriedade no uso da linguagem
Coerência e coesão textual
Domínio dos conteúdos, evidenciando a compreensão dos temas objeto da prova
Domínio e precisão no uso de conceitos
Coerência no desenvolvimento das ideias e capacidade argumentativa

Questão 1: **Valor (0,00 a 4,00)**

Considere um contínuo deformável com movimento descrito por

$$\begin{cases} x_1 = \alpha X_1, \\ x_2 = X_2, \\ x_3 = \beta X_3, \end{cases} \tag{1}$$

onde α, β são constantes reais e, para dado ponto material, $\mathbf{X}$ é a posição na configuração de referência e $\mathbf{x}$ é a posição na configuração atual. Os subíndices referem-se aos componentes no sistema Cartesiano.

A) Determine o gradiente de deformação $\mathbf{F}$ do movimento descrito pela Eq. (1). **(0,25)**

B) Há alguma restrição às constantes α, β para que o movimento (1) seja fisicamente admissível? **(0,25)**

C) Por que a deformação experimentada por esse contínuo é homogênea? Discorra sobre deformações homogêneas. **(1,00)**

D) Determine o tensor de Cauchy-Green à direita, relativo ao tensor de deformação encontrado em **(A)**. Interprete fisicamente o significado desse tensor. **(1,00)**

E) Discorra sobre o teorema da decomposição polar. Determine os tensores relativos à decomposição polar do movimento descrito pela Eq. (1). **(1,00)**

F) Suponha que o tensor de tensões de Cauchy proposto para esse material seja

$$\mathbf{T} = \gamma \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} + \epsilon \mathbf{W}^2, \tag{2}$$

onde γ, μ, ϵ são escalares reais constantes e $\mathbf{D}, \mathbf{W}$ são as partes simétrica e antissimétrica do gradiente de velocidades, respectivamente. Discuta se há alguma restrição a algum desses coeficientes para que essa relação constitutiva seja válida. **(0,50)**

Resp

(a) Nota-se que

$$\mathbf{F} = \alpha \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \textbf{ (0,25)}$$

(b) Um elemento diferencial de volume satisfaz

$$dv = JdV = det(\mathbf{F})dV.$$

É necessário que

$$J > 0. \textbf{ (0,20)}$$

Logo

$$J = \alpha\beta > 0$$

Então, $\alpha, \beta > 0$ ou $\alpha, \beta < 0$. **(0,05)**

(c) A deformação é homogênea porque $\mathbf{F}$ é independente de $\mathbf{X}$ **(0,20)**. Algumas características de deformações homogêneas:

1-Planos materiais deformam em planos; planos materiais paralelos deformam em planos paralelos. **(0,20)**

2-Curvas materiais retas deformam em linhas retas; curvas materiais retas e paralelas deformam em linhas paralelas. **(0,20)**

3-Superfície material esférica deforma numa elipsoide. **(0,20)**

Um exemplo de deformação homogênea: um movimento rígido, onde $\mathbf{F}$ é um tensor de rotação. **(0,20)**

(d) Este tensor é dado por

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \alpha^2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \beta^2 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \textbf{ (0,20)}$$

Para interpretar fisicamente este tensor, deixe $\mathbf{M}_1$ ser o vetor tangente unitário à curva material C_1 e $\mathbf{M}_2$ o vetor tangente unitário à curva material C_2, ambos na configuração de referência, então:

1- $\mathbf{C}$ fornece informações a respeito do comprimento de $\mathbf{M}_1$ na configuração deformada: $\mu_1^2 = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{C}\mathbf{M}_1$. **(0,40)**

2- $\mathbf{C}$ fornece informações a respeito do ângulo entre as curvas materiais C_1 e C_2 na configuração deformada: $\mu_1\mu_2\cos\theta_{12} = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{C}\mathbf{M}_2$. **(0,40)**

(e) O teorema da decomposição polar diz que um tensor não singular $\mathbf{F}$ pode ser expresso de forma única como

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR},$$

onde $\mathbf{R}$ é um tensor ortogonal próprio (ou de rotação) e

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}, \qquad \mathbf{V}^2 = \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$$

são tensores simétricos e positivo-definidos. **(0,40)**

Para interpretar o significado desse teorema, considere uma curva material na configuração de referência com vetor tangente unitário $\mathbf{M}$. Desta forma, é possível interpretar que $\mathbf{F}$ atua para, primeiramente, "esticar/comprimir" $\mathbf{M}$ por meio de $\mathbf{U}$ (com possível rotação) seguida de rotação pura por meio de $\mathbf{R}$. **(0,10)**

Para o problema em questão,

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = |\alpha|\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + |\beta|\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \text{ (0,25)}$$

e

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \frac{|\alpha|}{\alpha}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{|\beta|}{\beta}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3.$$

Se $\alpha, \beta > 0$,

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = \mathbf{I}.$$

E se $\alpha, \beta < 0$,

$$\mathbf{R} = -\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = -(\mathbf{I} - 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2). \text{ (0,25)}$$

(f) O tensor $\mathbf{T}$ deve respeitar a invariância sob sobreposição de movimentos rígidos:

$$\mathbf{T}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T,$$

onde $\mathbf{Q}$ é um tensor de rotação. **(0,25)**

Mas

$$\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T = \gamma\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}^+ + \epsilon(\mathbf{QWQ}^T)^2 \neq \gamma\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}^+ + \epsilon(\mathbf{W}^+)^2.$$

Logo, é necessário que $\epsilon = 0$ para essa relação constitutiva ser válida **(0,25)**.

Questão 2: **Valor (0,00 a 3,50)**

Seja um sólido elástico linear, cuja equação constitutiva é dada por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon}, \tag{1}$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j$ é o tensor de tensão de Cauchy, $\mathbf{E} = E_{ijkl}\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l$ é o tensor de Young e $\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j$ é o tensor deformação infinitesimal, em que $\{\hat{e}_r\}_{r=1}^3$ designa os vetores da base canônica. Considerando o seguinte problema em sua forma forte: determinar o campo de deslocamento $\mathbf{u} \in [H^2(\Omega)]^3$, $\Omega \in \mathbb{R}^3$ limitado, tal que

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, \text{em } \Omega; \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, \text{em } \Gamma_D; \\ \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{t}, \text{em } \Gamma_N; \end{cases} \tag{2}$$

em que $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, $\mathbf{t} \in \left[H^{1/2}(\Omega)\right]^3$ e o versor $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal externa ao domínio Ω.

A) Determine a forma fraca do problema acima, descrito pela Eq. (2). **(2,00)**

B) Mostre que condições devem existir sobre o tensor de Young para que a existência e unicidade de solução do problema em sua forma fraca sejam garantidas. **(1,50)**

Resposta Esperada:

(a) Seja o espaço $V = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3 : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_D\}$, neste sentido segue

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0, \forall \mathbf{v} \in V;$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \sigma_{ij,j} v_i \, d\Omega = 0, \forall \mathbf{v} \in V;$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (\sigma_{ij} v_i)_{,j} \, d\Omega - \int_\Omega \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega = 0, \forall \mathbf{v} \in V;$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} v_i \hat{n}_j \, d\partial\Omega - \int_\Omega \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega = 0, \forall \mathbf{v} \in V; (\mathbf{1,00})$$

$$\Rightarrow \int_\Omega E_{ijkl} \epsilon_{kl} v_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma_N} t_i v_i \, d\partial\Omega \, , \forall \mathbf{v} \in V;$$

$$\Rightarrow \int_\Omega E_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma_N} t_i v_i \, d\partial\Omega \, , \forall \mathbf{v} \in V;$$

Deste modo a forma fraca do problema acima descrito pode ser apresentada da forma seguinte: determinar o campo de deslocamento $\mathbf{u} \in V$, tal que

$$\int_\Omega^0 (\mathbf{E} : \nabla \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\partial\Omega \, , \forall \mathbf{v} \in V. (\mathbf{1,00})$$

(b) O problema em sua forma fraca determinado no item (a) pode ser reescrito do seguinte modo: determinar o campo de deslocamento $\mathbf{u} \in V$, tal que

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V,$$

em que

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega (\mathbf{E} : \nabla \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \, ;$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma_N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\partial\Omega \, . (\mathbf{0,50})$$

É de fácil verificação que $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é uma forma bilinear e que $l(\mathbf{v})$ é uma forma linear, e neste contexto se $\mathbf{E}$ for tal que $\exists \, C_1, C_2$ constantes reais positivas com

$$\left| \int_\Omega (\mathbf{E} : \nabla \mathbf{v}_1) : \nabla \mathbf{v}_2 \, d\Omega \right| \leq C_1 \|\mathbf{v}_1\|_V \|\mathbf{v}_2\|_V, \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V \; (\mathbf{0,50})$$

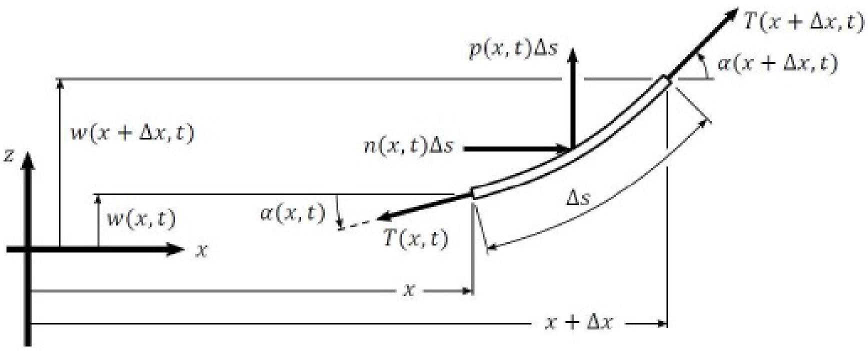
e

$$\left| \int_\Omega (\mathbf{E} : \nabla \mathbf{v}) : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \right| \geq C_2 \|\mathbf{v}\|_V^2, \forall \mathbf{v} \in V$$

tem-se garantida a coersividade e a continuidade do bilinear B e deste modo satisfazendo as hipóteses do teorema de Lax-Milgram que garante os resultados de existência e unicidade de solução do problema em sua forma fraca. $(\mathbf{0,50})$

Questão 3: **Valor (0,00 a 2,50)**

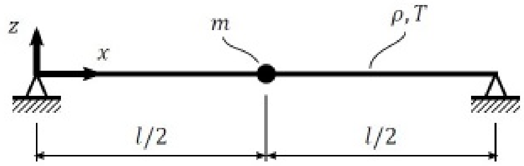
A figura a seguir mostra um elemento diferencial de uma corda tracionada, a qual tem densidade linear dada por $\rho(x)$. A tração que age na corda vale $T(x,\ t)$. Ainda, $n(x,\ t)$ e $p(x,\ t)$ representam forças externas, por unidade de comprimento, aplicadas ao longo de x e z, respectivamente. O campo $w(x,\ t)$ representa o deslocamento transversal da corda; enquanto o campo $\alpha(x,\ t)$ corresponde ao ângulo que a corda faz com a direção x. Finalmente, s é uma coordenada curvilínea, medida ao longo da corda deformada.



A) Estabeleça expressões para ds/dx, sen $\alpha(x,\ t)$ e cos $\alpha(x,\ t)$ em função do campo de deslocamento transversal $w(x,\ t)$. **(0,50)**

B) Deduza a equação diferencial parcial que rege o movimento do sistema mecânico em questão, adotando formulação Newtoniana, a partir do elemento diferencial ilustrado acima. Também obtenha uma equação diferencial que permita determinação de $T(x,\ t)$, em função dos esforços externos. Explicite todas as hipóteses consideradas ao longo de seu desenvolvimento. Expresse suas respostas em termos de $w(x,\ t)$, fazendo uso do obtido em (a). **(1,00)**

C) Considere agora uma corda de comprimento l, que tem suas extremidades fixas, conforme mostrado a seguir. No meio de seu comprimento, existe uma massa m, solidária à corda tracionada. Simplifique as equações obtidas em (b) para representar a dinâmica deste sistema, considerando que $\partial w(x,t)/\partial x \ll 1$ e que $n(x,\ t) = 0$. Em seu desenvolvimento, apresente uma expressão para $p(x,\ t)$ que permita incorporar o efeito da massa m na equação do movimento do sistema. **(1,00)**



Resposta Esperada:

(a) Da geometria associada ao elemento de corda tracionada, é possível perceber que:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + [w(x+\Delta x,t) - w(x,t)]^2 \text{ (teorema de Pitágoras)}$$

e

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left[\frac{w(x+\Delta x,t) - w(x,t)}{\Delta x}\right]^2,$$

que proporciona, quando $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2}. \ \mathbf{(0,20)} \tag{1}$$

Ainda da geometria mostrada para o elemento de corda tracionada no enunciado da questão, pode-se obter:

$$\text{sen}\,\alpha(x,t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{w(x+\Delta x,t) - w(x,t)}{\Delta s} = \pm\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \Big/ \sqrt{1 + \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2}, \ \mathbf{(0,15)} \tag{2}$$

$$\cos\alpha(x,t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} = \pm 1 \Big/ \sqrt{1 + \left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2}, \ \mathbf{(0,15)} \tag{3}$$

onde foi feito uso do resultado mostrado em (1).

(b) Somando forças na direção x, e levando em conta que a corda tracionada não admite deslocamentos ao longo de tal direção, resulta que:

$$-T(x,t)\cos\alpha(x,t) + n(x,t)\Delta s + T(x+\Delta x,t)\cos\alpha(x+\Delta x,t) = 0. \ \mathbf{(0,10)}$$

Reorganizando os termos e dividindo por Δx, pode-se obter:

$$\frac{T(x+\Delta x,t)\cos\alpha(x+\Delta x,t) - T(x,t)\cos\alpha(x,t)}{\Delta x} + n(x,t)\frac{\Delta s}{\Delta x} = 0,$$

a qual proporciona, quando $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{\theta}{\theta x}[T(x,t)\cos\alpha(x,t)] = -n(x,t)\frac{ds}{dx}. \ \mathbf{(0,30)} \tag{4}$$

Pode-se proceder de maneira semelhante para a direção z. Somando forças ao longo de tal direção, obtém-se:

$$-T(x,t)\,\text{sen}\,\alpha(x,t) + p(x,t)\Delta s + T(x+\Delta x,t)\,\text{sen}\,\alpha(x+\Delta x,t) = \rho(x)\Delta s\frac{\partial^2 w(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}, \ \mathbf{(0,10)}$$

sendo a inércia do elemento diferencial de corda tracionada agora relevante, em função de seu movimento ao longo de z. Na equação anterior, $\theta \in [0, 1]$ é um parâmetro arbitrário, no sentido que o mesmo não afeta desenvolvimentos que seguem. Reorganizando termos, dividindo por Δx e tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, resulta que:

$$\rho(x)\frac{ds}{dx}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}[T(x,t)\,\text{sen}\,\alpha(x,t)] = p(x,t)\frac{ds}{dx}. \ \mathbf{(0,30)} \tag{5}$$

As Eqs. (4) e (5) correspondem às equações diferenciais que permitem obtenção de $T(x,t)$ e $w(x,t)$, respectivamente. No entanto, as mesmas estão expressas em termos do comprimento de arco s e do ângulo $\alpha(x,t)$, os quais não são independentes do campo de deslocamento $w(x,t)$. Usando as Eqs. (1), (2) e (3), as equações diferenciais mostradas em (4) e (5) podem ser reescritas conforme a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x,t) \Big/ \sqrt{1+\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2}\right] = -n(x,t)\sqrt{1+\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2}, \mathbf{(0{,}10)} \qquad (6)$$

$$\rho(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\sqrt{1+\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[T(x,t)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \Big/ \sqrt{1+\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2}\right] = p(x,t)\sqrt{1+\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2}. \mathbf{(0{,}10)} \qquad (7)$$

(c) Assumindo que $\alpha(x,t)$ seja pequeno, o que é equivalente a $\partial w(x,t)/\partial x \ll 1$, as equações obtidas no item (b) podem ser simplificadas para:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = -n(x,t), \qquad \rho(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[T(x,t)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right] = p(x,t). \ (\mathbf{0,10})$$

Ainda, se $n(x,t) \equiv 0$:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0 \ \Rightarrow \ T = T(t) \ \Rightarrow \ \rho(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - T(t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = p(x,t). (\mathbf{0,10})$$

Para levar em consideração a massa presente no meio do vão da corda tracionada, pode-se adotar:

$$p(x,t) = \delta\left(x-\frac{l}{2}\right)\left[-m\frac{\partial^2 w\left(\frac{l}{2},t\right)}{\partial t^2}\right], (\mathbf{0,20})$$

onde $\delta(\cdot)$ representa a função delta de Dirac, e o termo entre colchetes corresponde à força de inércia produzida devido ao movimento da massa m. (Sua aceleração é igual àquela da corda tracionada no ponto onde está instalada.) Com isso, a equação diferencial parcial que rege o movimento da corda tracionada em análise fica dada por:

$$\rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 w\left(\frac{l}{2},t\right)}{\partial t^2}\delta\left(x-\frac{l}{2}\right) = 0 \ \ (\mathbf{0,50})$$

para $x \in [0, l]$, onde se considerou que ρ e T são constantes. Quanto às condições de contorno do problema, são dadas por $w(0,t) = 0$ e $w(l,t) = 0$. **(0,10)**

Solução alternativa: a dinâmica da corda tracionada com uma massa em seu centro pode ser descrita por um conjunto de duas equações diferenciais parciais:

$$\rho \frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in \left[0, \frac{l}{2}\right), \qquad (\mathbf{0,25})$$

$$\rho \frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in \left(\frac{l}{2}, l\right], \qquad (\mathbf{0,25})$$

complementadas pelas duas condições de contorno listadas acima e, ainda:

$$w_1\left(\frac{l}{2}^-, t\right) = w_2\left(\frac{l}{2}^+, t\right), \qquad (\mathbf{0,25})$$

$$-T\frac{\partial^2 w_1\left(\frac{l}{2}^-, t\right)}{\partial x^2} + T\frac{\partial^2 w_2\left(\frac{l}{2}^+, t\right)}{\partial x^2} = m\frac{\partial^2 w_2\left(\frac{l}{2}^+, t\right)}{\partial t^2} = m\frac{\partial^2 w_1\left(\frac{l}{2}^-, t\right)}{\partial t^2}, \qquad (\mathbf{0,25})$$

que representam compatibilidade de deslocamento e equilíbrio (dinâmico) de forças em x = l/2.

NATAL, 10 de Outubro de 2022 às 10:39.

Assinado digitalmente em 10/10/2022 09:33	Assinada digitalmente em 10/10/2022 10:27	Assinado digitalmente em 10/10/2022 10:33
RUBENS GONCALVES SALSA JUNIOR PRESIDENTE	THIAGO DE PAULA SALES 1° EXAMINADOR	HILBETH PARENTE AZIKRI DE DEUS 2° EXAMINADOR