

Exame de Admissão ao Mestrado
27/01/2017 - DEST/UFRN

Instruções

- (i) A prova é individual, sem consultas e o uso de calculadora não é permitido.
(ii) Sempre justifique suas respostas.

1. (2 Pontos) Seja X uma variável aleatória com distribuição Binomial de parâmetros n e p . Determine:
 - (a) $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$;
 - (b) $\mathbb{E}\left(\frac{X!(n-k)!}{(X-k)!n!}\right)$.
2. (2 Pontos) Considere três urnas. A urna 1 contém uma bola branca e $2n - 1$ bolas verdes, a urna 2 contém n bolas brancas e n bolas verdes e a urna 3 contém $2n - 1$ bolas brancas e uma bola verde, com $n \in \{1, 2, \dots\}$. Considere o experimento que consiste em retirar uma bola ao acaso de uma das urnas e registrar a sua cor. Suponha que a probabilidade inicial (anterior à informação do resultado do experimento) da bola ter sido extraída da urna i seja $p_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ com $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.
 - (a) Qual a probabilidade de ter sido extraída uma bola branca?
 - (b) Qual a probabilidade da bola ter sido extraída da urna 1 dado que a bola retirada é branca?
3. (2 Pontos) Prove os resultados abaixo.
 - (a) Sejam A, B e C eventos associados a um experimento, então
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) - 2\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$
 - (b) Se $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$ e $\mathbb{P}(B \cap C^c) > 0$, então
$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B \cap C^c)\mathbb{P}(C^c|B)$$
4. (2 Pontos) Suponha que X é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade dada por

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{k}{2^x} I_{\{1,2,3,4\}}(x)$$

- (a) Determine o valor de k ;
 - (b) Obtenha a função de distribuição de X e esboce o seu gráfico;
 - (c) Calcule a variância de X .
5. (2 Pontos) Um dado é lançado duas vezes. Considere os eventos?

A : Obtém-se 2 ou 5 no primeiro lançamento.

B : A soma das faces obtidas nos dois lançamentos é pelo menos 7.

C : A soma das faces é par.

D : A soma das faces obtidas é divisível por 3.

- (a) A e B são independentes?
- (b) C e D são independentes?