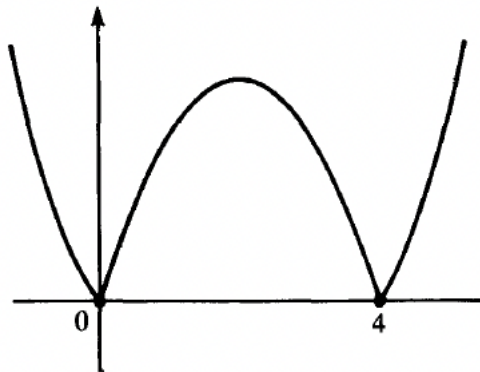


Seleção PPGEA

1. Esboce o gráfico da função

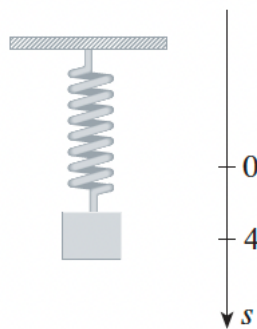
$$f(x) = |x^2 - 4x|$$

Solução:



2. Um objeto na extremidade de uma mola vertical é esticado 4 *cm* além de sua posição de repouso e liberado no instante t . Veja a Figura e observe que a direção para baixo é positiva. Sua posição no instante t é

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

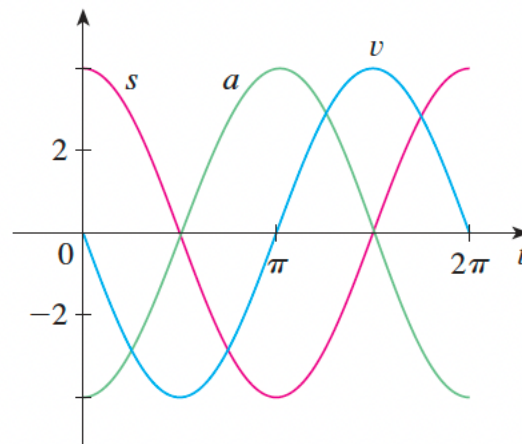


Determine a velocidade v e a aceleração a no instante t , esboce os gráficos de $s(t)$, $v(t)$ e $a(t)$, de $t = 0$ a $t = 2\pi s$, e analise o movimento oscilatório do objeto (descrevendo a amplitude, o período de oscilação, os comportamentos da velocidade e aceleração).

Solução:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = -4 \sin t$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \sin t) = -4 \cos t$$

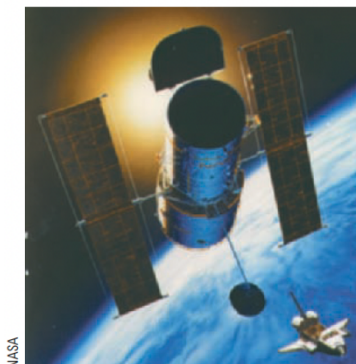


O objeto oscila do ponto mais baixo ($s = 4\text{cm}$) ao ponto mais alto ($s = -4\text{cm}$). O período da oscilação é 2π , que é o período de $\cos t$.

A intensidade da velocidade é $|v| = 4|\sin t|$, que é maior quando $|\sin t| = 1$, isto é, quando $\cos t = 0$. Portanto, o objeto se move mais rápido ao passar por sua posição de equilíbrio ($s = 0$). Sua velocidade é 0 quando $\sin t = 0$, isto é, no ponto mais alto e mais baixo.

A aceleração é nula, $a = -4 \cos t = 0$, quando $s = 0$. Ela tem maior magnitude no ponto mais alto e mais baixo.

3. O Telescópio Espacial “Hubble” (Figura) foi lançado em 24 de abril de 1990 pelo ônibus espacial “Discovery”.



Um modelo para a velocidade do ônibus espacial durante esta missão, desde a decolagem ($t = 0$) até o descarte dos foguetes auxiliares de combustível sólido ($t = 126s$), é dado por (em pés por segundo - ft/s)

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$$

Usando este modelo, estime os valores máximo e mínimo absolutos da aceleração do ônibus espacial entre a decolagem e o descarte dos foguetes auxiliares. **Observação: o candidato deve usar uma calculadora na resolução desta questão.**

Solução: Queremos os valores extremos da função de aceleração. Portanto, precisamos primeiro derivar a velocidade para encontrar a aceleração.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083)$$

$$a(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t + 23,61$$

Agora, aplicamos o Método do Intervalo Fechado à função contínua $a(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 126$. Assim, sua derivada é

$$\frac{da}{dt} = 0,007812t - 0,18058$$

Nesse caso, o único número crítico ocorre quando

$$\frac{da}{dt} = 0 \Rightarrow 0,007812t - 0,18058$$

$$t \cong 23,12s$$

Assim, calculando no número crítico e nos pontos extremos, obtemos

$$a(0) = 23,61$$

$$a(23,12) \cong 21,52$$

$$a(126) \cong 62,87$$

Concluindo, a aceleração máxima é de aproximadamente $62,87 ft/s^2$ e a aceleração mínima é de $21,52 ft/s^2$.

4. Calcule a integral abaixo, usando integração por partes.

$$\int_1^e \ln(x) dx$$

Solução:

$$\int_1^e \ln(x) dx \equiv I$$

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$I = [\ln(x) x]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx$$

$$I = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e dx = [x \ln(x)]_1^e - [x]_1^e$$

$$I = (e \ln(e) - \ln(1)) - (e - 1)$$

$$I = e - 0 - e + 1$$

$$I = \int_1^e \ln(x) dx = 1$$

5. Encontre o gradiente $\vec{\nabla} f$ da função abaixo no ponto Q .

$$f(x, y) = 5 \sin x^2 + \cos 3y; \quad Q\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 0\right)$$

Solução:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} f = (5 \cos x^2 (2x)) \vec{i} + (-\sin 3y (3)) \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} f = 10x \cos x^2 \vec{i} - 3 \sin 3y \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} f = 10 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \cos \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2 \vec{i} - 3 \sin 3(0) \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} f = 5\sqrt{\pi} \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \vec{i} - 3 \sin(0) \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} f = 5\sqrt{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} = \frac{5\sqrt{2\pi}}{2} \vec{i}$$

6. Seja o campo escalar ψ . Descreva exatamente quais são as informações fornecidas pelo vetor gradiente desse campo, $\vec{\nabla} \psi$, e por sua magnitude, $|\vec{\nabla} \psi|$.

Solução:

O $\vec{\nabla} \psi$ é um vetor que tem a direção da taxa de variação máxima (acrécimo) espacial do campo escalar f e sua magnitude $|\vec{\nabla} \psi|$ fornece a inclinação (o valor da taxa de variação de aumento) ao longo dessa direção.